補足説明 第5章 線形空間

第5章で取り扱っている線形空間は，第3章の数ベクトル空間を一般化・抽象化したものである．数ベクトル空間で成立する命題や定理は，線形空間でも同様に成り立ち，そのため，教科書ではそれらの証明のほとんどを省略している．ここでは，これら省略した証明を述べるとともに，線形写像，線形同型などの教科書では割愛した事柄について補うこととする．

5.1 線形空間

5.1.1 線形空間の定義

$\boldsymbol{K}$ を実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ または複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ とする．空でない集合 V において，V の任意の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し，その**和**とよばれる V の元 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が定められ，さらに V の任意の元 $\boldsymbol{a}$ と任意の $\boldsymbol{K}$ の元 λ に対し，その**スカラー倍**とよばれる V の元 $\lambda\boldsymbol{a}$ が定められているものとする．このとき，次の (V1)〜(V8) の性質が成り立つとき，V を $\boldsymbol{K}$ 上の**線形空間**という．V の元を**ベクトル**といい，$\boldsymbol{K}$ の元を**スカラー**という．$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ のときの線形空間 V を**実線形空間**，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ のときの線形空間 V を**複素線形空間**という.（以下，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は V の任意の元とし，λ, μ は $\boldsymbol{K}$ の任意の元とする.）

(V1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
(V2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
(V3) 次をみたす $\boldsymbol{0}\in V$ が存在する：
任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$
(V4) 任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ となる元 $\boldsymbol{y}$ が V に存在する．
(V5) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$
(V6) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$
(V7) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
(V8) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

線形空間において，性質 (V3) をみたす $\boldsymbol{0}$ は一意的に定まり，これを**零ベクトル**という．性質 (V4) における $\boldsymbol{y}$ も $\boldsymbol{x}$ に対し一意的に定まり，これを $-\boldsymbol{x}$ と表す[1]．また，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in V$ に対して，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ と表す．とくに，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ である．

任意の $\boldsymbol{a}\in V$ に対して，性質 (V1), (V5) を用いて，

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=(0+1)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a})=0\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}$$

であるので，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ である．$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$ や $\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ も成立する．

数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ や $\boldsymbol{C}^n$ は，当然のことながら，これらの (V1)〜(V8) の性質をみたす．

5.1.2 線形空間の例

教科書では数ベクトル空間以外の代表的な線形空間の例をいくつかあげた．これら以外にも，実数列の全体は $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間である．

[1] これらのことについては，教科書演習問題 **5.1**，**5.2** にて，証明問題として取り上げている．

例 5.1.4 実数からなる数列全体の集合を S とする．数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，和 $\{a_n\}+\{b_n\}$ とスカラー倍 $\lambda\{a_n\}$ を

$$\{a_n\}+\{b_b\}=\{a_n+b_n\}, \quad \lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$$

と定めると，S は実線形空間である．

実際に，
(V1)：数列の第 n 項について，$(a_n+b_n)+c_n=a_n+(b_n+c_n)$ が成立するので，数列の全体集合における演算「和」は

$$(\{a_n\}+\{b_n\})+\{c_n\}=\{a_n\}+(\{b_n\}+\{c_n\})$$

をみたす．

(V3)：0 のみが並んでいる数列を $\{0\}$ と書くと，明らかに，任意の数列 $\{a_n\}$ に対して，$a_n+0=a_n$ であるので，

$$\{a_n\}+\{0\}=\{a_n\}$$

が成り立つ．

(V4)：任意の数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{-a_n\}$ を考えると，$a_n+(-a_n)=0$ であるので，

$$\{a_n\}+\{-a_n\}=\{0\}$$

が成立する．

同様に，(V2)，(V5)〜(V8) も成立することが容易に確かめられる．よって，実数列全体の集合を S は実線形空間である．

5.2 基底と次元

スカラー集合 $\boldsymbol{K}$ が $\boldsymbol{C}$ の場合も $\boldsymbol{R}$ の場合と同様のことが成立するので，5.5 節までは $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間のみを考えることとし，単に線形空間ということにする．

線形空間 V において，V のベクトル $\boldsymbol{x}$ が V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ によって，

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n \in \boldsymbol{R})$$

と書き表すことができるとき，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の**１次結合**で表されるという．

関係式

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0} \tag{B1}$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の**１次関係式**という．明らかに，

$$0\boldsymbol{a}_1+0\boldsymbol{a}_2+\cdots+0\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0} \tag{B2}$$

が成立する．１次関係式 (B2) を**自明な１次関係式**という．V のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が非自明な１次関係式を持たない，すなわち，１次関係式 (B1) が $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$ の場合に限って成り立つとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は**１次独立**であるという．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$

が１次独立でないとき，すなわち，$c_i \neq 0$ となる c_i が少なくとも１つ存在して，１次関係式 (B1) が成り立つとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は**１次従属**であるという．

一般の線形空間の場合でも第 3 章命題 3.2.1 や命題 3.2.2 と同様のことがらが成立する．形式的な議論になるが，これらの証明についても述べる．

命題 5.2.1　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ を線形空間 V のベクトルとし，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は１次独立なベクトルの組であるとする．このとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ が１次従属であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の１次結合で表すことができることである．

[**証明**]　教科書の演習問題 5.5 と同じ内容であるが，念のために証明を書き記すこととする．
（十分性）$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表されるとする．すなわち，

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n$$

とする．このとき，1 次関係式

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n + (-1)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{B3}$$

を得る．この 1 次関係式 (B3) において $\boldsymbol{b}$ の係数は $-1 \neq 0$ であるので，この 1 次関係式は非自明である．よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ は 1 次従属である．
（必要性）$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ が 1 次従属であるならば，非自明な 1 次関係式

$$\mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{a}_n + \lambda \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{B4}$$

をもつ．これが非自明であるので，係数のうちの少なくとも 1 つは 0 ではない．$\lambda = 0$ とすると，上記の 1 次関係式 (B4) は

$$\mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

であり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立であることから，$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$ でなければならない．しかし，このことは 1 次関係式 (B4) が非自明であることに反し矛盾である．よって，$\lambda \neq 0$ でなければならない．このとき，1 次関係式 (B4) を変形すると，

$$\boldsymbol{b} = \left(-\frac{\mu_1}{\lambda}\right)\boldsymbol{a}_1 + \left(-\frac{\mu_2}{\lambda}\right)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \left(-\frac{\mu_n}{\lambda}\right)\boldsymbol{a}_n$$

が成立するので，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で書き表される．（命題 3.2.1 参照）■

命題 5.2.2　$m > n$ とする．線形空間 V の m 個のベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ のどれもが V の n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の１次結合で表すことができるならば，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ は１次従属である．

[**証明**]　各 $\boldsymbol{b}_j$ $(j=1,\,2,\,\ldots,\,m)$ が１次結合

$$\boldsymbol{b}_j = c_{1j}\boldsymbol{a}_1 + c_{2j}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_{nj}\boldsymbol{a}_n$$

で表されているものとする．c_{ij} を第 (i,j) 成分とする $n\times m$ 型行列を $C=(c_{ij})$ とするとき，$m>n\geqq \operatorname{rank} C$ であるので，同次連立１次方程式 $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明でない解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ をもつ．$\boldsymbol{d}$ の各第 j 成分を d_j とすると，

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}d_j = 0 \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

であり，少なくとも１つの d_j は 0 ではない．

このとき，

$$\begin{aligned} d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + d_m\boldsymbol{b}_m &= \sum_{j=1}^{m} d_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{a}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ij}d_j\right) \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

である．よって，$\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{b}_m$ は１次従属である．(命題 3.2.2 参照)　■

線形空間 V のベクトルの系 $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ が V の**生成系**であるとは，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n$ の１次結合で書き表すことができることをいう．また，このとき，$\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n\}$ は V を**生成する**ともいう．

V を $V\neq\{\boldsymbol{0}\}$ なる線形空間とする．このとき，１次独立な生成系，すなわち，次の２つの条件をみたすベクトルの系 $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_r\}$ を V の**基底**という．

(1) $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_r$ は１次独立である，

(2) $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_r\}$ は V の生成系である．

$V=\{\boldsymbol{0}\}$ または有限個のベクトルからなる基底をもつ線形空間 V を**有限次元線形空間**といい，有限個のベクトルからなる生成系をもたない線形空間を**無限次元線形空間**という．

命題 5.2.3　V を $V\neq\{\boldsymbol{0}\}$ なる線形空間とする．V の r 個のベクトルからなる系 $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_r\}$ が次の２つの条件をみたすとき，$\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_r\}$ は V の基底である．

(1) $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_r$ は１次独立である，

(2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，$\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_r,\,\boldsymbol{b}$ は１次従属である．

[**証明**]　条件 (2) と命題 5.2.1 により，$\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_r\}$ が V の生成系である．よって，$\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_r\}$ は V の１次独立な生成系，すなわち，基底である．　■

命題 5.2.2 と命題 5.2.3 により，$V\neq\{\boldsymbol{0}\}$ なる線形空間 V の基底を構成するベクトルの個数 r は一定であり，それは V の中から選び出すことのできる１次独立な最大組を構成するベクトルの個数と一致することがわかる．基底を構成するベクトルの個数 r を V の**次元**といい，$\dim V$ と書く．$\boldsymbol{R}$ 上の線形空間の次元であることを明示したい場合には，$\dim_{\boldsymbol{R}} V$ と書くこともある．また，$V=\{\boldsymbol{0}\}$ のときの次元は 0 であるとし，$\dim\{\boldsymbol{0}\}=0$ と定義する．

定理 5.2.4 V を $V \neq \{\mathbf{0}\}$ なる線形空間とする．V が有限個のベクトルからなる生成系をもつならば，V は有限次元線形空間である．

[**証明**] $V \neq \{\mathbf{0}\}$ であるので，$\boldsymbol{a}_1 \neq \mathbf{0}$ である $\boldsymbol{a}_1 \in V$ が存在する．$\{\boldsymbol{a}_1\}$ が V の生成系であるならば，$\{\boldsymbol{a}_1\}$ は V の基底であり，$\dim V = 1$ である．$\{\boldsymbol{a}_1\}$ が V の生成系でないならば，$\lambda\boldsymbol{a}_1$ $(\lambda \in \boldsymbol{R})$ の形ではないベクトル $\boldsymbol{a}_2 \in V$ が存在する．このとき，命題 5.2.1 により，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立である．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が V の生成系であるならば，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は V の基底であり，$\dim V = 2$ である．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が V の生成系でないならば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の 1 次結合で表されないベクトル $\boldsymbol{a}_3 \in V$ が存在する．このとき，命題 5.2.1 により，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．以下，この操作を繰り返す．すなわち，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が V の 1 次独立な組であるとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が V の生成系であれば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は V の基底であり，$\dim V = r$ である．そうでないならば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合で表されないベクトル $\boldsymbol{a}_{r+1}$ を選ぶ．V は有限個のベクトルからなる生成系をもつので，この操作は有限回で終了しなければならない[2]．(定理 3.2.4 参照) ■

定理 5.2.4 の証明の手法により，与えられた有限次元線形空間の基底を具体的に構成することができる．

5.3 部分空間

5.3.1 部分空間

線形空間 V の空でない部分集合 W において，V の「和」および「スカラー倍」に関して閉じている，すなわち，次の 2 つの条件 (1), (2) をみたすとき，これら 2 つの演算により，W は線形空間となる．

(1) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ に対して，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$

(2) 任意の $\boldsymbol{a} \in W$ および，任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，$\lambda\boldsymbol{a} \in W$

このような W を V の**線形空間**という．

部分空間 W は常に零ベクトル $\mathbf{0}$ を含む[3]．

実際に，$\boldsymbol{a}$ を W から任意に取り出すと，部分空間の定義により，$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{a} \in W$ であることがわかる．教科書であげた例以外に 2 つ例をあげる．

例 5.3.3 a を定数とする．次で定める線形空間 $F(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ の部分集合

$$W = \{y(x) \in C^1(\boldsymbol{R}) \mid y' + ay = 0\}$$

は $F(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ の部分空間である．

実際，任意の $y_1, y_2 \in W$ に対して，$y_i' + ay_i = 0$ $(i = 1, 2)$ であるので，

$$(y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = (y_1' + ay_1) + (y_2' + ay_2) = 0 + 0 = 0$$

[2] この操作が有限回で終了しないならば，命題 5.2.2 に反する．

[3] 教科書では，部分空間の定義として，「$\mathbf{0} \in W$」であることを条件の中に含めたが，$W \neq \emptyset$ であることと，残り 2 つの条件から「$\mathbf{0} \in W$」を導きだすことができる．

となり，$y_1+y_2\in W$ である．また，任意の $y\in W$ と任意の $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$(\lambda y)'+a(\lambda y)=\lambda(y'+ay)=\lambda 0=0$$

なので，$\lambda y\in W$ である．さらに，明らかに $0(x)\in W$ であり，その結果，$W\neq\emptyset$ である．したがって，W は $F(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$ の部分空間である．

関数の積の微分法を用いると，任意の $y\in W$ に対して，

$$\frac{d}{dx}(ye^{ax})=y'e^{ax}+aye^{ax}=(y'+ay)e^{ax}=0$$

であるので，ye^{ax} は定数である．よって，$y=ce^{-ax}$(c は任意の定数）である．このことは，部分空間 W が 1 つの関数 $y=e^{-ax}$ で生成されることを意味する．したがって，W は $\{e^{-ax}\}$ を基底にもつ 1 次元線形空間である．

例 5.3.4 フィボナッチ型数列の全体集合 W を考える．すなわち，

$$W=\left\{\ \{a_n\}\in S\ \middle|\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n\geqq 1)\ \right\}$$

とすると，W は実数列全体からなる実線形空間 S の部分空間である．

数列 $\{a_n\}\in S$ に対して，

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \tag{B5}$$

をみたす実数 α,β を考えると，

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$$

であるので，

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-1 \tag{B6}$$

であれば，数列 $\{a_n\}\in S$ はフィボナッチ型数列である．関係式 (B6) をみたす α,β は 2 次方程式 $t^2-t-1=0$ の解である．よって，$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ について，(B5) より，数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は初項 $a_2-\alpha a_1$，公比 β の等比数列である．その一般項は

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1} \tag{B7}$$

で与えられる．(B5) を変形すると，

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

が成立し，α と β を入れ替えても同様のことが成り立つので，

$$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1} \tag{B8}$$

を得る．(B7) と (B8) を連立させて，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\beta-\alpha}\left\{(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}\right\}\\&=a_1\frac{\alpha^{n-1}\beta-\alpha\beta^{n-1}}{\beta-\alpha}+a_2\frac{\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}\end{aligned}$$

を得る．ここで，数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を

$$x_n = \frac{\alpha^{n-1}\beta - \alpha\beta^{n-1}}{\beta - \alpha}, \quad y_n = \frac{\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} \quad (n \geqq 1)$$

と定めると，$\{x_n\}$, $\{y_n\} \in W$ である[4]．よって，任意の $\{a_n\} \in W$ は

$$a_n = a_1 x_n + a_2 y_n \quad \text{すなわち，} \{a_n\} = a_1\{x_n\} + a_2\{y_n\} \tag{B9}$$

をみたす．初期条件 a_1, a_2 は任意の実数を取ることができるので，式 (B9) は部分空間 W が 2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ で生成されることを意味する．また，容易にこの 2 つの数列が 1 次独立であることを確認することができる．したがって，フィボナッチ型数列の全体が作る部分空間 W は 2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を基底とする 2 次元実線形空間である．

定理 3.2.4 と全く同様にして，次の定理を証明することができる．

定理 5.3.1 W を有限次元線形空間 V の部分空間とする．また，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を 1 次独立な W のベクトルの組とする．このとき，このベクトルの組に適当な s 個のベクトル $\boldsymbol{a}_{r+1}, \boldsymbol{a}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{r+s}$ を必要であれば付け加えて，

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \boldsymbol{a}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{r+s}\}$$

が線形空間 W の基底であるようにすることができる．

部分空間 W が $W \neq \{\boldsymbol{0}\}$ であるとき，零ベクトルでない $\boldsymbol{a} \in W$ を 1 つ選び，これからスタートして定理 3.2.4（定理 5.2.4）の証明と同様の議論をすることにより，次の系を得ることができる．

系 5.3.2 W を有限次元線形空間 V の $W \neq \{\boldsymbol{0}\}$ である部分空間とする．このとき，W は有限次元線形空間であり，W には基底が存在する．さらに，$\dim W \leqq \dim V$ である．

さらに，命題 3.2.7 , 系 3.2.8 と全く同様に証明して，次の命題，系を得ることができる．

命題 5.3.3 W を有限次元線形空間 V の部分空間とする．このとき，$\dim W$ は W に含まれるベクトルの 1 次独立なものの最大個数に等しい．

---

[4] $\alpha + 1 = \alpha^2$, $\beta + 1 = \beta^2$ であることに注意すれば，$\{x_n\}$, $\{y_n\} \in W$ であることを確認することができる．

系 5.3.4　W_1, W_2 を有限次元線形空間 V の部分空間とする．このとき，$W_1 \subset W_2$ であるならば,

$$\dim W_1 \leqq \dim W_2$$

である．等号成立は $W_1 = W_2$ であるときに限る.

5.3.2 生成系が与えられた部分空間

線形空間 V において，V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表されるベクトル全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \in V \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in \boldsymbol{R}\}$$

と表す.

定理 5.3.5　線形空間 V の部分集合 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ は V の有限次元部分空間である.

$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ **によって生成される部分空間**という.

[**証明**]　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を W の任意の元とすると，これらは 1 次結合

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{y} &= d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + d_n\boldsymbol{a}_n \end{aligned}$$

で表される．このとき,

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (c_1 + d_1)\boldsymbol{a}_1 + (c_2 + d_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (c_n + d_n)\boldsymbol{a}_n$$

と表され，右辺は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合なので，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ である.

任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，$\lambda\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ であることも同様に示すことができる.

よって，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ は V の部分空間である.　■

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立である場合には，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は部分空間 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ の基底である．一般には，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立であるとは限らないので,

$$\dim\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle \leqq n$$

である．実際には，次の命題を得る.

命題 5.3.6　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の中から選び出すことのできる 1 次独立な最大個数を r とする．このとき,

$$\dim\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle = r$$

である.

ベクトルの集合 S において，S の中から r 個のベクトルからなる１次独立な組を選ぶことができ，S の中のどの $r+1$ 個のベクトルを選んでも１次従属となるとき，r を S の中から選び出すことのできる**１次独立な最大個数**という．

[**証明**] $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ とおく．また，$\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ を選ばれた１次独立な最大の組とする．r が最大数であることから，命題 5.2.1 により，他の $\boldsymbol{a}_j$ は $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ の１次結合で表される．よって，W の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ も $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ の１次結合で表される．したがって，

$$W = \langle \boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r} \rangle$$

である．明らかに，$\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ は $\langle \boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r} \rangle$ の基底であるので，

$$\dim \langle \boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r} \rangle = r$$

である．したがって，$\dim W = r$ である． ■

5.4 座標と表現行列

次の定理から始める．

定理 5.4.1 線形空間 V において，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を１次独立なベクトルの組とする．このとき，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の１次結合としての書き表し方は一意的である．すなわち，$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$ と表したときの係数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ は $\boldsymbol{x}$ に対して一意的に定まる．

[**証明**] $\boldsymbol{x}$ の１次結合

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$
$$\boldsymbol{x} = c'_1\boldsymbol{u}_1 + c'_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c'_n\boldsymbol{u}_n$$

について，辺々を引くと，

$$\boldsymbol{0} = (c_1 - c'_1)\boldsymbol{u}_1 + (c_2 - c'_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (c_n - c'_n)\boldsymbol{u}_n$$

である．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次独立なベクトルの組であるので，$c_1 - c'_1 = c_2 - c'_2 = \cdots = c_n - c'_n = 0$，すなわち，$c_1 = c'_1, c_2 = c'_2, \ldots, c_n = c'_n$ である． ■

r 次元線形空間 V の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ が与えられると，定理 5.4.1 により，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ はこの基底に関する１次結合

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r$$

として，一意的に表現される．このとき，係数を成分とする r 次列ベクトル

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}$$

を V の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ に関する $\boldsymbol{x}$ の**座標**という.

注意 教科書の例題 5.4.1 からも明らかなように，基底の取り方を変えたり，あるいは基底のベクトルの並び方を変えると，前の座標とは異なるものになる．座標は，基底や基底のベクトルの順序に依存することに注意する必要がある.

線形空間 V の１次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ に対して，これらの１次結合で表されるベクトルの組

$$\boldsymbol{v}_j = a_{1j}\boldsymbol{u}_1 + a_{2j}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{u}_m \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

を考える．a_{ij} を第 (i, j) 成分とする $m \times n$ 型行列 $A = (a_{ij})$ を用いて，１次結合の組を

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m)A$$

と表現することとし，行列 A を１次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ に関する**１次結合の表現行列**という.

定理 5.4.2 線形空間 V の１次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ に対して，V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が，$m \times n$ 型行列 $A = (a_{ij})$ を用いて，

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m)A$$

により１次結合で表されているものとする．このとき，次が成立する.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は１次独立である $\iff$ $\operatorname{rank} A = n$

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の間と A の n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の間には，同じ１次関係式が成立する.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の中から選び出すことのできる１次独立な最大個数と A の n 個の列ベクトル中から選び出すことのできる１次独立な最大個数は等しい.

教科書では，定理 5.4.2 のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ は線形空間 V の基底であるとしたが，実際のところは「1 次独立なベクトルの組」という条件のもとで成立する.

[**証明**] 各 $\boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は１次結合

$$\boldsymbol{v}_j = a_{1j}\boldsymbol{u}_1 + a_{2j}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{u}_m$$

で表されている. １次関係式

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \tag{B10}$$

にこれらの１次結合を用いると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} &= c_1\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\boldsymbol{u}_i + c_2\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\boldsymbol{u}_i + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{in}\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n} c_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{u}_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right)\boldsymbol{u}_i\end{aligned}$$

である．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ は１次独立であるので，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

でなければならない．すなわち，1 次関係式 (B10) が成立することと，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ が同次連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解ベクトルであることは同値である．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が１次独立であるのは，１次関係式 (B10) が $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のときに限り成立することである．一方，同次連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が自明な解のみを解にもつための必要十分条件は $\operatorname{rank} A = n$ である．

よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が１次独立であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} A = n$ である．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が１次関係式 (B10) をみたすとすると，$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．$A\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{a}_n$ であるので，

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．逆も同様にして成立することがわかる．

(3) (2) から明らかである．■

教科書の例題 5.4.2 と同様の例題を以下に提示する．

例題 5.4.3　線形空間 $\boldsymbol{R}[x]_4$ の次の５つのベクトルで生成される部分空間 $\langle f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)\rangle$ の１組の基底と次元を求めよ．

$$f_1(x) = -2x^4 + 3x^3 + x^2 - 1, \qquad f_2(x) = 2x^4 + x^3 + x + 1,$$
$$f_3(x) = 6x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 3, \qquad f_4(x) = x^4 + x^3 + 1$$
$$f_5(x) = -5x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 3$$

[**解答**]　$\boldsymbol{R}[x]_4$ の基底として $\{x^4, x^3, x^2, x, 1\}$ を考える．この基底に関する $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ の１次結合を行列を用いて表現すると，

$$(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)) = (x^4, x^3, x^2, x, 1)\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

である．この１次結合の表現行列を A とおく．このとき，定理 5.4.2 (2) により，$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ の間の１次関係式は A の５つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ の間の１次関係式と同じであるので，A の５つの列ベクトルの間の１次関係式を調べる．行列

A を行基本変形により簡約化すると,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

を得る．A の階段行列 B の列ベクトルを $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_5$ とすると，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ は１次独立であり，$\boldsymbol{b}_3 = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_5 = 3\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_4$ が成り立つ．

よって,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 \text{ は１次独立であり,} \\ &\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2, \\ &\boldsymbol{a}_5 = 3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_4 \end{aligned}$$

が成り立つ．これらの１次関係式は $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ の間の１次関係式と同じであるので,

$$\begin{aligned} &f_1(x), f_2(x), f_4(x) \text{ は１次独立であり,} \\ &f_3(x) = -f_1(x) + 2f_2(x), \\ &f_5(x) = 3f_1(x) + f_2(x) - f_4(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．

したがって，$f_1(x), f_2(x), f_4(x)$ は $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ の中から選び出すことのできる１次独立な最大組であり，これは部分空間 $\langle f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)\rangle$ の求めるべき基底の１組である．また，次元は $\dim\langle f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)\rangle = 3$ である． ■

5.5 内積空間

V を $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間とする．V の任意の２つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，実数値 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ が定まり,

(I1) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a})$

(I2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$

(I3) $(\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) \quad (\lambda \in \boldsymbol{R})$

(I4) (i) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) \geqq 0$

(ii) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

が成り立つとき，実数値 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ を対応させる対応 (,) を線形空間 V の**内積**といい，内積が指定された $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間を $\boldsymbol{R}$ 上の**内積空間**という．

例 5.5.1 $\boldsymbol{R}^n$ における標準内積は (I1) ～ (I4) をみたす.

また，$\boldsymbol{R}^n$ 上には標準内積以外にも，次のような内積がある．

$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対して,

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + 2a_2b_2 + \cdots + ka_kb_k + \cdots + na_nb_n$$

と定めると，これは (I1) $\sim$ (I4) をみたすので $\boldsymbol{R}$ の内積である.

このように1つの線形空間にいくつもの内積を与えることができる.

例 5.5.2 閉区間 $[a,\ b]$ 上の実数値連続関数全体からなる線形空間 $C([a,\ b])$ において，対応 (,) を

$$(f,\ g) = \int_a^b f(x)g(x)\ dx \quad (f, g \in C([a,\ b]))$$

で定義する．このとき，定積分の定義と線形性により，(I1) $\sim$ (I4)(i) がみたされ，関数の連続性により (I4)(ii) がみたされる．よって，このように定義された $C([a,\ b])$ における対応 (,) は $C([a,\ b])$ 上の内積である.

例 5.5.3 多項式からなる線形空間 $\boldsymbol{R}[x]_n$ において，対応 (,) を $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, $g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ に対して

$$(f(x),\, g(x)) = a_nb_n + a_{n-1}b_{n-1} + \cdots + a_0b_0$$

と定義する．このとき，対応 (,) は $\boldsymbol{R}[x]_n$ の内積である．また，例 5.5.2 を利用した

$$(f(x),\, g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\ dx$$

も $\boldsymbol{R}[x]_n$ の別の異なる内積を与える.

V を内積 (,) が指定された $\boldsymbol{R}$ 上の内積空間とする．このとき，ベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ に対して，$\|\boldsymbol{a}\|$ を

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})}$$

と定める．これを $\boldsymbol{a}$ の**長さ**または**ノルム**という.
ベクトルの長さについて，次の性質が成り立つ.

定理 5.5.1 $\boldsymbol{R}$ 上の内積空間におけるベクトルの長さについて，次が成立する.
(1) $\|\boldsymbol{a}\| \geqq 0$
(2) $\|\boldsymbol{a}\| = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
(3) $\|\lambda\boldsymbol{a}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{a}\|$
(4) $|(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ 　(**シュワルツの不等式**)
(5) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ 　(**三角不等式**)

[**証明**] 性質 (1) $\sim$ (3) については，内積の性質 (I2), (I4) に従う．
(4) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときは両辺の値がともに 0 であるので，不等号が成立する．

$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ とする．任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して，$\|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2\geqq 0$ である．一方，

$$\|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\|^2t^2+2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})t+\|\boldsymbol{b}\|^2 \tag{B11}$$

であるので，この t についての 2 次式が任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して非負となる．

よって，$\|\boldsymbol{a}\|^2>0$ に注意すると，2 次式 (B11) の判別式 D は $D\leqq 0$ をみたさなければならない．すなわち，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})^2-\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\leqq 0$ である．こうして示したい不等式を得る．
(5) シュワルツの不等式により，

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\leqq|(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})|\leqq\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

であるので，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\|\boldsymbol{a}\|^2+2(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})+\|\boldsymbol{b}\|^2\\&\leqq\|\boldsymbol{a}\|^2+2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|+\|\boldsymbol{b}\|^2=(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2\end{aligned}$$

である．よって，示したい不等式を得る． ■

$\boldsymbol{R}$ 上の内積空間 V において，ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ が $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=0$ をみたしているとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**という．互いに直交している $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ を**直交系**という．更に，直交系 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ のすべてのベクトル $\boldsymbol{a}_i$ の長さが 1 であるとき，すなわち，

$$(\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_j)=\delta_{ij}\quad(i,j=1,\,2,\,\ldots,\,k)$$

が成り立つとき，この直交系を**正規直交系**という．とくに，有限次元内積空間 V の基底が正規直交系であるとき，このような基底を**正規直交基底**という．

例 5.5.4 整数 k,ℓ に対して，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin\ell x\ dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos\ell x\ dx=\pi\delta_{k\ell}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos\ell x\ dx=0$$

である．よって，例 5.5.2 の内積空間 $C([-\pi,\ \pi])$ において，

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\ell x\ \middle|\ k,\ell=1,\,2,\,\ldots,\,n\right\}$$

は正規直交系である．物理学や電気・電子工学，通信工学などで重要な「フーリエ変換」は，与えられた区分的に滑らかな関数を無限個の三角関数からなる正規直交系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\ell x\ \middle|\ k,\ell=1,\,2,\,\ldots,\,n,\,\ldots\right\}$ による 1 次結合として表現する方法に他ならない．

定理 5.5.2　零ベクトルではないベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が直交系であるとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は１次独立である.

[**証明**]　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は直交系なので，$i \neq j$ ならば $(\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_j) = 0$ である.
１次関係式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ について，

$$0 = (\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}_j) = (\sum_{i=1}^{k} c_i\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{k} c_i(\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_j) = c_j(\boldsymbol{a}_j,\ \boldsymbol{a}_j)$$

である．$(\boldsymbol{a}_j,\ \boldsymbol{a}_j) \neq 0$ であるので，$c_j = 0$ である．よって，$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ であるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は１次独立である.（定理 3.4.3 参照）　■

数ベクトル空間におけるグラム・シュミットの直交化法（定理 3.4.5）と同様の手順を一般の内積空間に対しても考察することができる．定理 3.4.5 と全く同じ手順であるが，ここに再度書き記すこととする.

グラム・シュミットの直交化法　$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ を線形空間 V の基底とする．このとき，帰納的に V のベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を次のように定める：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{a}_1, \\
\boldsymbol{b}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1, \\
\boldsymbol{b}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2, \\
&\ \ \vdots \\
\boldsymbol{b}_n &= \boldsymbol{a}_n - \frac{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_{n-1})}{(\boldsymbol{b}_{n-1}, \boldsymbol{b}_{n-1})}\boldsymbol{b}_{n-1}
\end{aligned}$$

このとき，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ は V の直交基底となる．これらの長さを 1 にそろえるために，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}, \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|}, \ldots, \boldsymbol{u}_n = \frac{\boldsymbol{b}_n}{\|\boldsymbol{b}_n\|}$$

とすると，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の正規直交基底となる.

グラム・シュミットの直交化法を用いると、次の定理を得る.

定理 5.5.3　有限次元内積空間 V は正規直交基底を必ずもつ.

例題 5.5.1　線形空間 $\boldsymbol{R}[x]_2$ のベクトル $f(x), g(x)$ に対して，

$$(f(x),\ g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\ dx$$

と定めると，これは $\boldsymbol{R}[x]_2$ の内積である（例 5.5.3）．このとき，$\boldsymbol{R}[x]_2$ の基底 $\{x^2, x, 1\}$ にグラム・シュミットの直交化法を適用して，$\boldsymbol{R}[x]_2$ の正規直交基底を求めよ.

[**解答**] 先ず，$\{x^2, x, 1\}$ を直交化する．$f_1(x) = x^2$ とおくと，

$$(f_1,\ f_1) = \int_0^1 (x^2)^2\ dx = \frac{1}{5}, \quad (x,\ f_1) = \frac{1}{4}$$

であるので，

$$f_2(x) = x - \frac{(x,\ f_1)}{(f_1,\ f_1)} f_1(x) = -\frac{5}{4}x^2 + x$$

である．同様に，

$$(1,\ f_1) = \frac{1}{3}, \quad (1,\ f_2) = \frac{1}{12}, \quad (f_2,\ f_2) = \frac{1}{48}$$

であるので，

$$f_3(x) = 1 - \frac{(1,\ f_1)}{(f_1,\ f_1)} f_1(x) - \frac{(1,\ f_2)}{(f_2,\ f_2)} f_2(x) = \frac{10}{3}x^2 - 4x + 1$$

である．このとき，$\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ は $\boldsymbol{R}[x]_2$ の直交基底である．

これらを正規化する．$\|f_1\| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \|f_2\| = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}, \|f_3\| = \dfrac{1}{3}$ であるので，

$$g_1(x) = \frac{1}{\|f_1\|} f_1(x) = \sqrt{5}x^2, \quad g_2(x) = \frac{1}{\|f_2\|} f_2(x) = -5\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}x,$$
$$g_3(x) = \frac{1}{\|f_3\|} f_3(x) = 10x^2 - 12x + 3$$

とおくと，$\{g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$ は指定された内積に関する $\boldsymbol{R}[x]_2$ の正規直交基底である．
■

また，数ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ と同様に，$\boldsymbol{C}$ 上の線形空間に対しても内積の概念を導入することができる．

V を $\boldsymbol{C}$ 上の線形空間とする．V の任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，複素数値 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が定まり，

(I1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$ （$\overline{z}$ は複素数 z の共役複素数）
(I2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$
(I3) $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad (\lambda \in \boldsymbol{C})$
(I4) (i) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})$ は実数で，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) \geqq 0$.
(ii) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

が成り立つとき，複素数値 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を対応させる対応 (,) を線形空間 V の**内積** または **エルミート内積**といい，内積が指定された $\boldsymbol{C}$ 上の線形空間を $\boldsymbol{C}$ 上の**内積空間** または **エルミート内積空間**という.

また，ベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ に対して，

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

で定められる $\|\boldsymbol{a}\|$ を $\boldsymbol{a}$ の**長さ**または**ノルム**という.

例 5.5.5 $\boldsymbol{C}^n$ における通常の内積は (I1) 〜 (I4) をみたす.

$\boldsymbol{R}$ 上の線形空間における内積との大きな違いは，$\boldsymbol{C}$ 上の線形空間における内積は，複素数に値を取ることと，(I1) である．とくに，(I1), (I3) により

$$(\boldsymbol{a},\, \lambda\boldsymbol{b}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) \quad (\lambda \in \boldsymbol{C})$$

であることに注意しなければならない．

$\boldsymbol{C}$ 上の内積空間においても，$\boldsymbol{R}$ 上の内積空間の場合と同様に定理 5.5.1 と同様のことが成立する．そして，直交系，正規直交基底，グラム・シュミットの直交化法なども同様に考えることができ，定理 5.5.3 と同様のことが成立する．

5.6 自然科学・工学への応用

線形代数学は，数学のみならず，自然科学や工学，人文社会系科学に広く応用されている．その内容は多岐に渡り，また，専門的知識を必要とする．そのため，線形代数学の応用については，教科書に述べている程度とする．

5.7 共通空間と和空間（追加）

複素線形空間についても同様のことが成立するので，特に断らない限り，線形空間は実線形空間であるとする．

W_1, W_2 を線形空間 V の部分空間とするとき，容易にわかるように，それらの共通部分 $W_1 \cap W_2$ は V の部分空間である．$W_1 \cap W_2$ を W_1, W_2 の**共通空間**という．

共通部分 $W_1 \cap W_2$ が部分空間になることに対して，和集合 $W_1 \cup W_2$ は必ずしも V の部分空間になるとは限らない．例えば，$\boldsymbol{R}^2$ の部分空間 W_1, W_2 を次のようにとる．

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 2x - y = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 2x + y = 0 \right\}$$

このとき，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W_1 \cup W_2$ であるが，

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2$$

である．よって，このような $W_1 \cup W_2$ は部分空間ではない．

そこで，次の命題で定義される $W_1 + W_2$ を考える．

命題 5.7.1　線形空間 V の部分空間 W_1, W_2 に対して，$W_1 + W_2$ を

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \mid \boldsymbol{x}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in W_2\}$$

と定義する．このとき，$W_1 + W_2$ は V の部分空間である．

$W_1 + W_2$ を W_1, W_2 の**和空間** または **和**という．

[**証明**]　任意の $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in W_1 + W_2$ に対して，$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_{i1} + \boldsymbol{x}_{i2}$ と書ける $\boldsymbol{x}_{i1} \in W_1,\ \boldsymbol{x}_{i2} \in W_2$ が存在する $(i = 1, 2)$．このとき，W_1, W_2 が部分空間であることに注意すると，

$$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = (\boldsymbol{x}_{11} + \boldsymbol{x}_{21}) + (\boldsymbol{x}_{12} + \boldsymbol{x}_{22}) \quad (\boldsymbol{x}_{11} + \boldsymbol{x}_{21} \in W_1,\ \boldsymbol{x}_{12} + \boldsymbol{x}_{22} \in W_2)$$

であるので，$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in W_1 + W_2$ である．

同様に，任意の $\boldsymbol{y} \in W_1 + W_2$ と任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，$\lambda \boldsymbol{y} \in W_1 + W_2$ であることもわかる．

よって，$W_1 + W_2$ は V の部分空間である．■

例 5.7.1　$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; y = 0 \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; z = 0 \right\}$ に対して，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in W_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

であるので，$W_1+W_2=\boldsymbol{R}^3$ である．

このベクトルの和の表し方に関して，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\in W_1,\ \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\in W_2$$

とも表すことができるので，W_1, W_2 のベクトルの和としての表し方は１通りではない．

線形空間 V の部分空間 W_1, W_2 の和空間 $W=W_1+W_2$ のベクトルが W_1, W_2 のベクトルの和として一意的に表されるとき，W_1+W_2 を**直和空間** または **直和**といい，$W=W_1\oplus W_2$ と表す．

命題 5.7.2　和空間 $W=W_1+W_2$ が直和空間であるための必要十分条件は，$W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$ である．

[**証明**]　和空間 W_1+W_2 が直和空間であるとする．このとき，任意の $\boldsymbol{x}\in W_1\cap W_2$ に対して，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}$ のように W_1+W_2 の元としてのベクトルの和として表すことができる．和空間 W_1+W_2 が直和空間であることから，ベクトルの和としての表現の一意性により，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ である．よって，$W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$ である．

逆に，$W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$ であるとする．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1\in W_1$ および $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2\in W_2$ に対して，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2$ であるならば，$\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{x}_2\in W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$ であるので，$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}_2$ が成り立つ．すなわち，和空間 W_1+W_2 におけるベクトルの和としての表現は一意的であり，和空間 W_1+W_2 は直和空間である．■

共通空間と和空間の次元については，次の関係式が成立する．

定理 5.7.3（共通空間・和空間の次元定理）　W_1, W_2 を有限次元線形空間 V の部分空間とするとき，

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

が成り立つ．とくに，直和空間については，

$$\dim(W_1\oplus W_2)=\dim W_1+\dim W_2$$

である．

[**証明**]　$\dim(W_1\cap W_2)=r$，$\dim W_1=r+s$，$\dim W_2=r+t$ とし $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r\}$ を共通空間 $W_1\cap W_2$ の基底とする．

$W_1\cap W_2\subset W_1$ であることに注意すると，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ は W_1 における１次独立な組であり，定理 5.3.1 を適用することにより，W_1 の s 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_s$ を追加して，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_s\}$ が W_1 の基底であるようにすることができる．同様にして，W_2 の t 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_t$ を追加して，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_t\}$ が W_2 の基底であるようにすることができる．

このとき，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_t\}$ は W_1+W_2 の基底である．実際，１次関係式

$$\lambda_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{w}_r + \mu_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_s\boldsymbol{u}_s + \nu_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \nu_t\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{0} \tag{B12}$$

に対して，一部を左辺へ移行して，

$$\lambda_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{w}_r + \mu_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_s\boldsymbol{u}_s = -\nu_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \nu_t\boldsymbol{v}_t \tag{B13}$$

を得る．このとき，等式 (B13) の左辺は W_1 のベクトルであり，右辺は W_2 のベクトルである．よって，等式 (B13) の右辺は $W_1 \cap W_2$ のベクトルであるので，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ の１次結合

$$-\nu_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \nu_t\boldsymbol{v}_t = \xi_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \xi_r\boldsymbol{w}_r \tag{B14}$$

で表すことができる．等式 (B14) の左辺を移行して，

$$\xi_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \xi_r\boldsymbol{w}_r + \nu_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots + \nu_t\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{0} \tag{B15}$$

を得る．$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_t\}$ は W_2 の基底であるので，とくに，１次独立である．よって，１次関係式 (B15) により，

$$\nu_1 = \cdots = \nu_t = 0$$

を得る．これらを等式 (B12) に代入すると，

$$\lambda_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{w}_r + \mu_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_s\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{0} \tag{B16}$$

である．同様に，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_s\}$ が W_1 の基底であることに注意すると，その１次独立性により，

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_1 = \cdots = \mu_s = 0$$

である．よって，１次関係式 (B12) のすべての係数は 0 でなければならないので，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots$ $\boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_t$ は１次独立である．

また，任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2, \quad (\boldsymbol{y}_1 \in W_1, \boldsymbol{y}_2 \in W_2)$$

と表すことができる．このとき，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ は W_1, W_2 のそれぞれの基底を用いて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1 &= \lambda_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{w}_r + \mu_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_s\boldsymbol{u}_s \\ \boldsymbol{y}_2 &= \nu_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \nu_r\boldsymbol{w}_r + \xi_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \xi_t\boldsymbol{v}_t\end{aligned}$$

と表すことができる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \\ &= (\lambda_1 + \nu_1)\boldsymbol{w}_1 + \cdots + (\lambda_r + \nu_r)\boldsymbol{w}_r + \mu_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_s\boldsymbol{u}_{+}\xi_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \xi_t\boldsymbol{v}_t\end{aligned}$$

であるので，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_t\}$ は $W_1 + W_2$ の生成系である．

以上により，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_t\}$ は $W_1 + W_2$ の基底である．よって，

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2) &= r + s + t = (r + s) + (r + t) - s \\ &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)\end{aligned}$$

である．

直和空間の次元については，命題 5.7.2 により $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つので，次元公式は明らかである．■

例 5.7.1 の $\boldsymbol{R}^3 = W_1 + W_2$ において，W_1, W_2 のベクトルの和としての書き表し方が一意的ではないので，この和空間は直和ではなかった．また，この例の W_1, W_2 の次元は $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ であるので，定理 5.7.3 の次元定理により，

$$\begin{aligned}\dim(W_1 \cap W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) \\ &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim \boldsymbol{R}^3 = 1\end{aligned}$$

である．よって，$W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ であるので，次元定理を利用しても，例 5.7.1 の $\boldsymbol{R}^3 = W_1 + W_2$ が直和空間ではないことがわかる．

例 5.7.2 n 次実正方行列全体からなる線形空間 $M(n, n; \boldsymbol{R})$ において，対称行列全体からなる部分集合を W_1, 交代行列全体からなる部分集合を W_2 とする．すなわち，

$$\begin{aligned}W_1 &= \{A \in M(n, n; \boldsymbol{R}) \mid {}^tA = A\} \\ W_2 &= \{A \in M(n, n; \boldsymbol{R}) \mid {}^tA = -A\}\end{aligned}$$

とする．このとき，W_1, W_2 は $M(n, n; \boldsymbol{R})$ の部分空間であり，それぞれの次元は $\dim W_1 = \dfrac{n^2 + n}{2}$, $\dim W_2 = \dfrac{n^2 - n}{2}$ である．また，任意の n 次正方行列 $A \in M(n, n; \boldsymbol{R})$ に対して，$B = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$, $C = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ と定めると，

$$A = B + C, \quad (B \in W_1,\ C \in W_2)$$

である．よって，$M(n, n; \boldsymbol{R}) = W_1 + W_2$ である．さらに，任意の $A \in W_1 \cap W_2$ に対して，

$$A = {}^tA = -A$$

が成り立つので，$A = O$ であり，$W_1 \cap W_2 = \{O\}$ であることがわかる．

したがって，$M(n, n; \boldsymbol{R}) = W_1 \oplus W_2$ である．$\dim M(n, n; \boldsymbol{R}) = n^2$ であるので，この例でも，関係式 $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ を確認することができる．

5.8 線形写像（追加）

5.8.1 線形写像

線形空間 V, W の間の写像 $f : V \to W$ が線形空間の 2 つの演算「和」および「スカラー倍」を保存するとき，すなわち，

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ および任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，$f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$

が成立するとき，写像 $f : V \to W$ を**線形写像**という．とくに，$V = W$ であるとき，線形写像 $f : V \to V$ を V 上の**線形変換**という．

定理 5.8.1　線形写像について，以下が成り立つ．

(1) $\mathbf{0}_V$, $\mathbf{0}_W$ を線形空間 V, W それぞの零ベクトルとする．このとき，線形写像 $f : V \to W$ に対して，

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W, \quad f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}) \ (\boldsymbol{x} \in V)$$

が成り立つ．

(2) 2 つの線形写像 $f : U \to V,\ g : V \to W$ の合成写像 $g \circ f : U \to W$ も線形写像である．

[**証明**]　(1) $f(\mathbf{0}_V) = f(0\mathbf{0}_V) = 0f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ である．また，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$\mathbf{0}_W = f(\mathbf{0}_V) = f(\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) + f(-\boldsymbol{x})$ であるので，$f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ である．

(2) 合成写像 $g \circ f : U \to W$ が線形写像の定義の 2 つの条件をみたすことを確かめればよい．任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in U$ に対して，$g \circ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = g(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = g(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})) = g(f(\boldsymbol{x})) + g(f(\boldsymbol{y})) = g \circ f(\boldsymbol{x}) + g \circ f(\boldsymbol{y})$ が成り立つ．

同様にして，任意の $\boldsymbol{x} \in U$ と任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，$g \circ f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda g \circ f(\boldsymbol{x})$ が成立することもわかる．■

3.3 節でも述べたように，$m \times n$ 型実行列 A が定める写像 $f_A : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m; f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は線形写像である．また，任意の線形写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ に対して，$f = f_A$ となる $m \times n$ 型実行列 A がただ 1 つ存在する（定理 3.3.1)．次に，数ベクトル空間以外の線形空間上の線形写像の例をいくつかあげる．

例 5.8.1　線形空間 $C^n(\boldsymbol{R})$, $C^{n-1}(\boldsymbol{R})$ に対して，導関数を対応させる写像 $\varphi : C^n(\boldsymbol{R}) \to C^{n-1}(\boldsymbol{R}); \varphi(f) = f'$ は線形写像である．

例 5.8.2　線形空間 $\boldsymbol{R}[x]_n$, $\boldsymbol{R}[x]_{n+1}$ に対して，写像 $\varphi : \boldsymbol{R}[x]_n \to \boldsymbol{R}[x]_{n+1}$ を

$$\varphi(f(x)) = \int_0^x f(t)\ dt$$

で定める．このとき，φ は線形写像である．

5.8.2 線形写像の核と像

線形写像 $f: V \to W$ に対し，f によって W の零ベクトル $\mathbf{0}_W$ へ移される V のベクトル全体の集合

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W\}$$

を f の**核**という．また，V の f による像全体の集合

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \in W \mid \boldsymbol{x} \in V\}$$

を f の**像**という．次のように，定理 3.3.3 は一般の線形空間上の線形写像に対しても成立する．

定理 5.8.2　写像 $f: V \to W$ を線形写像とする．
(1)　f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である．
(2)　f の像 $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間である．

[**証明**]　(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}\, f$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W$ であるので，

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

である．よって，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}\, f$ である．

同様に，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f$ と任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，$f(\lambda\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W$ であることがわかるので，$\lambda\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f$ である．

以上により，$\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である．

(2) 任意の $f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}) \in \mathrm{Im}\, f$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$$

である．また，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$ であるので，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \in \mathrm{Im}\, f$ である．よって，$f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \in \mathrm{Im}\, f$ である．

任意の $f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, f$ と任意の $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，$\lambda f(\boldsymbol{x}) = f(\lambda\boldsymbol{x})$ $(\lambda\boldsymbol{x} \in V)$ であるので，$\lambda f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, f$ である．

以上により，$\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間である．　■

定理 3.3.4 もまた，一般の線形空間上の線形写像に対して成立する．

命題 5.8.2　V を有限次元線形空間とし，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を V の 1 組の基底とする．このとき，線形写像 $f: V \to W$ の像 $\mathrm{Im}\, f$ について，

$$\mathrm{Im}\, f = \langle f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n) \rangle$$

が成立する．

[**証明**]　V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$ と 1 次結合で表される．このとき，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{u}_1) + x_2 f(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{u}_n) \end{aligned}$$

であるので，$\mathrm{Im}\, f$ の任意のベクトルは $f(\boldsymbol{u}_1),\, f(\boldsymbol{u}_2),\, \ldots,\, f(\boldsymbol{u}_n)$ の１次結合で表される．よって，$\mathrm{Im}\, f$ は $f(\boldsymbol{u}_1),\, f(\boldsymbol{u}_2),\, \ldots,\, f(\boldsymbol{u}_n)$ で生成される部分空間である． ■

線形写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ の核と像の次元の関係について，定理 3.3.5 により，

$$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \boldsymbol{R}^n$$

が成り立つ．このことは，次の定理のように一般化される．

定理 5.8.3 (次元定理)　V, W を有限次元線形空間とする．このとき，線形写像 $f : V \to W$ の核と像の次元について，次の関係式が成立する．

$$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$$

[**証明**]　$\dim \mathrm{Ker}\, f = r,\, \dim \mathrm{Im}\, f = s$ とし，$\{\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{u}_r\}$ を $\mathrm{Ker}\, f$ の基底，$\{\boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{w}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{w}_s\}$ を $\mathrm{Im}\, f$ の基底とする．また，各 $i (1 \leqq i \leqq s)$ について，$\boldsymbol{w}_i \in \mathrm{Im}\, f$ なので，$\boldsymbol{w}_i = f(\boldsymbol{v}_i)$ をみたす $\boldsymbol{v}_i \in V$ が存在する．

ベクトルの系 $\{\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{u}_r,\, \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{v}_s\}$ が V の基底であることを示せば，$\dim V = r + s$ であることがわかる．

１次独立であることの証明：ベクトルの系 $\{\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{u}_r,\, \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{v}_s\}$ の１次関係式

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{u}_r + \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_s \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{0}_V \tag{B17}$$

を考える．$f(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{0}\ (1 \leqq j \leqq r),\ f(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$ なので，１次関係式 (B17) の両辺のベクトルを線形写像 f で移すと，

$$\mu_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \mu_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \mu_s f(\boldsymbol{v}_s) = \boldsymbol{0}_W$$

である．さらに，$f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i\ (1 \leqq i \leqq s)$ なので，

$$\mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \mu_s \boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{0}_W \tag{B18}$$

を得る．$\boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{w}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{w}_s$ は１次独立であるので，１次関係式 (B18) より，$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s = 0$ である．

これらを１次関係式 (B17) に代入すると，

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_r \boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}_V \tag{B19}$$

を得ることができ，$\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{u}_r$ が１次独立であることに注意して，$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ であることがわかる．

よって，

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s = 0$$

であり，$\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{u}_r,\, \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{v}_s$ は１次独立である．

生成系であることの証明：任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, f$ は $\mathrm{Im}\, f$ の生成系である $\boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{w}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{w}_s$ の１次結合で書き表される．

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 \boldsymbol{w}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{w}_s$$

とする．$f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i \ (1 \leqq i \leqq s)$ なので，

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_s f(\boldsymbol{v}_s) \tag{B20}$$

である．等式 (B20) の右辺を移項して，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} - \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 - \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \lambda_s \boldsymbol{v}_s) &= f(\boldsymbol{x}) - (\lambda_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{v}_2) \\ &\qquad\qquad + \cdots + \lambda_s f(\boldsymbol{v}_s)) \\ &= \boldsymbol{0}_W \end{aligned}$$

である．よって，$\boldsymbol{x} - \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 - \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \lambda_s \boldsymbol{v}_s \in \operatorname{Ker} f$ であり，このベクトルは $\operatorname{Ker} f$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ の 1 次結合で書き表すことができる．すなわち，

$$\boldsymbol{x} - \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 - \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \lambda_s \boldsymbol{v}_s = \mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \mu_r \boldsymbol{u}_r$$

と表すことができる．よって，

$$\boldsymbol{x} = \mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \mu_r \boldsymbol{u}_r + \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{v}_s$$

である．よって，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ は V の生成系である．

以上により，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ は V の基底であり，

$$\dim V = r + s = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

を得る． ■

例題 5.8.1　x についての多項式は，C^∞-級関数でもあるので，例 5.8.1 のように定められる写像 $\varphi : \boldsymbol{R}[x]_n \to \boldsymbol{R}[x]_n$

$$\varphi(f(x)) = f'(x)$$

は線形写像である．このとき，次を求めよ．

(1) 核 φ の 1 組の基底と次元

(2) 像 φ の 1 組の基底と次元

[**解答**]　任意の $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \boldsymbol{R}[x]_n$ に対して，

$$\varphi(f(x)) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1$$

である．

(1) $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x, 1$ は 1 次独立であるので，$f(x) \in \operatorname{Ker} f$ であるためには，

$$n a_n = 0, \quad (n-1) a_{n-1} = 0, \quad \cdots, \quad 2 a_2 = 0, \quad a_1 = 0$$

であることが必要十分条件である．よって，$\operatorname{Ker} \varphi$ は定数項だけからなる集合 $\operatorname{Ker} \varphi = \{a \in \boldsymbol{R}[x]_n \mid a \in \boldsymbol{R}\}$ である．したがって，定数項 1 だけからなる $\{1\}$ は $\operatorname{Ker} \varphi$ の基底であり，$\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$ である．

(2) $\{x^n,\, x^{n-1},\, \ldots,\, x,\, 1\}$ は $\boldsymbol{R}[x]_n$ の基底である．命題 5.8.2 により，像 $\operatorname{Im}\varphi$ は

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\varphi &= \langle \varphi(x^n),\, \varphi(x^{n-1}),\, \ldots,\, \varphi(x^2),\, \varphi(x),\, \varphi(1)\rangle \\ &= \langle nx^{n-1},\, (n-1)x^{n-2},\, \ldots,\, 2x,\, 1,\, 0\rangle \\ &= \langle nx^{n-1},\, (n-1)x^{n-2},\, \ldots,\, 2x,\, 1\rangle\end{aligned}$$

である．ここで，$nx^{n-1},\, (n-1)x^{n-2},\, \ldots,\, 2x,\, 1$ は 1 次独立であることを確かめることができる．よって，$\{nx^{n-1},\, (n-1)x^{n-2},\, \ldots,\, 2x,\, 1\}$ は像 $\operatorname{Im}\varphi$ の基底であり，$\dim\operatorname{Im}\varphi = n$ である．

(1)，(2) からわかるように，この線形写像 φ について，$\dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n+1 = \dim\boldsymbol{R}[x]_n$ である．このことは，線形写像の次元定理（定理 5.8.3）で述べられていることである． ■

線形写像 $f : V \to W$ が全単射であるとき，f を**同型写像**という．また，2 つの線形空間 V, W の間に同型写像 $f : V \to W$ が存在するとき，V は W と**同型**であるといい，$V \cong W$ と表す．同型であるということは，2 つの V, W が集合として対等（全単射な写像の存在）であるだけでなく，線形空間としての構造が本質的に同じであることを意味する．

命題 5.8.4 同型写像 $f : V \to W$ は全単射であるので，逆写像 $f^{-1} : W \to V$ をもつ．このとき，逆写像 $f^{-1} : W \to V$ もまた同型写像である．

[**証明**] $1_V : V \to V,\, 1_W : W \to W$ をそれぞれ，V の恒等写像，W の恒等写像とする．このとき，写像と逆写像の関係から，

$$f^{-1} \circ f = 1_V, \quad f \circ f^{-1} = 1_W$$

が成立する．写像 f が線形写像であることに注意すると，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ に対して，

$$\begin{aligned}f^{-1}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= f^{-1}(1_W(\boldsymbol{a}) + 1_W(\boldsymbol{b})) = f^{-1}(f \circ f^{-1}(\boldsymbol{a}) + f \circ f^{-1}(\boldsymbol{b})) \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(\boldsymbol{a})) + f(f^{-1}(\boldsymbol{b}))) \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(\boldsymbol{a}) + f^{-1}(\boldsymbol{b}))) = (f^{-1} \circ f)(f^{-1}(\boldsymbol{a}) + f^{-1}(\boldsymbol{b})) \\ &= 1_V(f^{-1}(\boldsymbol{a}) + f^{-1}(\boldsymbol{b})) \\ &= f^{-1}(\boldsymbol{a}) + f^{-1}(\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

が成り立つ．また，同様に，任意の $\boldsymbol{a} \in W$ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}f^{-1}(\lambda\boldsymbol{a}) &= f^{-1}(\lambda 1_W(\boldsymbol{a})) = f^{-1}(\lambda f \circ f^{-1}(\boldsymbol{a})) = f^{-1}(\lambda f(f^{-1}(\boldsymbol{a}))) \\ &= f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(\boldsymbol{a}))) = (f^{-1} \circ f)(\lambda f^{-1}(\boldsymbol{a})) \\ &= 1_V(\lambda f^{-1}(\boldsymbol{a})) \\ &= \lambda f^{-1}(\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，逆写像 $f^{-1} : W \to V$ は線形写像である．また，全単射な写像の逆写像は全単射でもある．したがって，逆写像 $f^{-1} : W \to V$ は同型写像である． ■

定理 5.8.5 V を r 次元線形空間とし，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ を V の基底とする．V の各ベクトル $\boldsymbol{x}$ に，この基底に関する座標を対応させる写像

$$\varphi : V \to \boldsymbol{R}^r \ ; \ \boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}$$

は同型写像である．よって，r 次元線形空間 V は数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^r$ と同型である．

[**証明**] 先ずは，写像 φ が線形写像であることを確認しよう．
$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r$, $\boldsymbol{y} = d_1\boldsymbol{u}_1 + d_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + d_r\boldsymbol{u}_r \in V$ に対して，

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \varphi(\sum_{i=1}^{r} c_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{r} d_i\boldsymbol{u}_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{r}(c_i+d_i)\boldsymbol{u}_i) \\
&= \begin{pmatrix} c_1+d_1 \\ c_2+d_2 \\ \vdots \\ c_r+d_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix} \\
&= \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

である．また，$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r \in V$ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\boldsymbol{x}) &= \varphi(\lambda\sum_{i=1}^{r} c_i\boldsymbol{u}_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{r}(\lambda c_i)\boldsymbol{u}_i) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda c_1 \\ \lambda c_2 \\ \vdots \\ \lambda c_r \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} \\
&= \lambda\varphi(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

である．よって，写像 φ は線形写像である．

次に，写像 φ が全射であることを確認する．任意の $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^r$ に対して，$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r$ とおくと，$\boldsymbol{x} \in V$ であり，明らかに，$\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$ である．よって，写像 φ は全射である．

最後に，写像 φ が単射であることを確認する．任意の $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r$, $\boldsymbol{y} =$

$d_1\boldsymbol{u}_1 + d_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + d_r\boldsymbol{u}_r \in V$ に対して，$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{y})$ であるとする．このとき，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix}$$

が成立するので，$c_1 = d_1,\, c_2 = d_2,\, \ldots,\, c_r = d_r$ である．よって，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ である．したがって，写像 φ は単射である．

以上により，写像 φ は同型写像である． ■

例 5.8.3 高々 n 次の多項式全体からなる線形空間 $\boldsymbol{R}[x]_n$ は $n+1$ 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ と同型である．

V を r 次元線形空間とし，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ を V の基底とする．W を s 次元線形空間とし，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ を W の基底とする．線形写像 $f : V \to W$ による $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の像 $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_r)$ は W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ の1次結合として一意的に表現される．それら1次結合を

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_1) = a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{s1}\boldsymbol{w}_s \\ f(\boldsymbol{v}_2) = a_{12}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{s2}\boldsymbol{w}_s \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f(\boldsymbol{v}_r) = a_{1r}\boldsymbol{w}_1 + a_{2r}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{sr}\boldsymbol{w}_s \end{cases}$$

とする．このとき，各1次結合の係数を成分とする列ベクトル，すなわち，各 $f(\boldsymbol{v}_j)$ の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ に関する座標を第 j 列ベクトルとして並べてできる $s \times r$ 型行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sr} \end{pmatrix}$$

を V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ に関する f の**表現行列**という．

r 次元線形空間 V 上の線形変換 $f : V \to V$ の場合，V の1組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ をとって，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ と $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ に関する f の表現行列のことを，V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ に関する線形変換 f の**表現行列**という．

例題 5.8.2　$\boldsymbol{R}[x]_2$ 上の写像 $\varphi : \boldsymbol{R}[x]_2 \to \boldsymbol{R}[x]_2$ を

$$\varphi(f(x)) = f'(x)x + f(0)(x^2 + x + 1) \quad (f(x) \in \boldsymbol{R}[x]_2)$$

と定義する．

(1) φ が線形変換であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}[x]_2$ の基底 $\{x^2, x, 1\}$ に関する φ の表現行列を求めよ．

(3) $\boldsymbol{R}[x]_2$ の基底 $\{x^2, x^2 + x, x^2 + x + 1\}$ に関する φ の表現行列を求めよ．

[**解答**]　(1) 多項式 $f(x) \in \boldsymbol{R}[x]_2$ に対して，$f'(x)x + f(0)(x^2+x+1)$ は高々 2 次の多項式なので，確かに $\varphi(f(x)) \in \boldsymbol{R}[x]_2$ である．任意の $f(x), g(x) \in \boldsymbol{R}[x]_2$ に対して，$\varphi(f(x)+g(x)) = (f'+g')(x)x + (f(0)+g(0))(x^2+x+1) = (f'(x)x + f(0)(x^2+x;1)) + (g'(x)x + g(0)(x^2+x;1)) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))$ なので，φ は演算「和」を保存する．同様にして，φ が演算「スカラー倍」も保存することを確かめることができる．よって，φ は $\boldsymbol{R}[x]_2$ 上の線形変換である．

(2) 基底 $\{x^2, x, 1\}$ に関する $\varphi(x^2), \varphi(x), \varphi(1)$ の座標を求める．

$$\varphi(x^2) = 2x^2, \quad \varphi(x) = x, \quad \varphi(1) = x^2 + x + 1$$

であるので，

$$(\varphi(x^2), \varphi(x), \varphi(1)) = (x^2, x, 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，基底 $\{x^2, x, 1\}$ に関する φ の表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(3) 基底 $\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ に関する $\varphi(x^2), \varphi(x^2+x), \varphi(x^2+x+1)$ の座標を求める．

$$\varphi(x^2) = 2x^2, \quad \varphi(x^2+x) = x^2 + (x^2+x), \quad \varphi(x^2+x+1) = x^2 + (x^2+x) + (x^2+x+1)$$

であるので，

$$(\varphi(x^2), \varphi(x^2+x), \varphi(x^2+x+1)) = (x^2, x^2+x, x^2+x+1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，基底 $\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ に関する φ の表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

■

線形空間の基底の取り方を変えると座標が前のものと異なるように，線形写像の表現行列も前のものと異なる．次に，基底の取り方を変えたときの線形写像の表現行列の変化の様子を考察することとする．

r 次元線形空間 V の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ と $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r\}$ を取る．このとき，各 $\boldsymbol{v}'_j$ は $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ の 1 次結合で表される．その関係を行列を用いて表現すると，

$$(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r)P$$

を得る．すなわち，$\boldsymbol{v}'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} p_{ij}\boldsymbol{v}_i$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ に対して，行列 P は p_{ij} を (i, j)-成分とする行列である．r 次正方行列 P を基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r\}$ への**基底変換の行列**という．基底変換の行列に関して次のことが成立する．

定理 5.8.6　r 正方行列 P を V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r\}$ への基底変換の行列とする．このとき，次が成立する．

(1)　P は正則行列である．

(2)　基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ への基底変換の行列は P の逆行列 P^{-1} である．

[**証明**]　基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ への基底変換の行列を Q とする．すなわち，基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r\}$ と基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ の間の１次結合による関係を行列を用いて表現すると，

$$(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r)P, \quad (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r) = (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r)Q$$

である．P, Q の成分を各々 $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{v}'_j = \sum_{k=1}^{r} p_{kj}\boldsymbol{v}_k, \quad \boldsymbol{v}_j = \sum_{k=1}^{r} q_{kj}\boldsymbol{v}'_k \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

である．

$$\boldsymbol{v}_j = \sum_{k=1}^{r} q_{kj}\boldsymbol{v}'_k = \sum_{k=1}^{r} q_{kj}\left(\sum_{i=1}^{r} p_{ik}\boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{r} p_{ik}q_{kj}\right)\boldsymbol{v}_i$$

であるので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の１次独立性により，

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik}q_{kj} = \delta_{ij}$$

を得る．すなわち，$PQ = E$ である．よって，P は正則行列であり，Q は P の逆行列 P^{-1} である．■

定理 5.8.7　$f : V \to W$ を有限次元線形空間 V, W の間の線形写像とする．V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ に関する f の表現行列を A とする．一方，V の別の基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r\}$ と W の別の基底 $\{\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_s\}$ に関する f の表現行列を B とする．

また，V の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_r\}$ への基底変換の行列を P とし，W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ から基底 $\{\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_s\}$ への基底変換行列を Q とする．

このとき，f の表現行列 A と B の間には，次の関係式が成立する．

$$B = Q^{-1}AP$$

[**証明**]　A は V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ に関する f の表現行列なので，

$$(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_r)) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s)A$$

である．$P = (p_{ij})$ とおくと，$\boldsymbol{v}'_j = \sum_{k=1}^{r} p_{kj}\boldsymbol{v}_k$ であるので，$f(\boldsymbol{v}'_j) = f\left(\sum_{k=1}^{r} p_{kj}\boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{r} p_{kj}f(\boldsymbol{v}_k)$ である．

よって，次の関係式を得る．

$$
\begin{aligned}
(f(\boldsymbol{v}'_1), f(\boldsymbol{v}'_2), \dots, f(\boldsymbol{v}'_r)) &= \left(\sum_{k=1}^{r} p_{k1} f(\boldsymbol{v}_k), \sum_{k=1}^{r} p_{k2} f(\boldsymbol{v}_k), \dots, \sum_{k=1}^{r} p_{kr} f(\boldsymbol{v}_k)\right) \\
&= (f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_r))P \\
&= (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_s)AP
\end{aligned}
$$

である．一方，

$$(f(\boldsymbol{v}'_1), f(\boldsymbol{v}'_2), \dots, f(\boldsymbol{v}'_r)) = (\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \dots, \boldsymbol{w}'_s)B, \quad (\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \dots, \boldsymbol{w}'_s) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_s)Q$$

であるので，

$$(f(\boldsymbol{v}'_1), f(\boldsymbol{v}'_2), \dots, f(\boldsymbol{v}'_r)) = (\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \dots, \boldsymbol{w}'_s)B = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_s)QB$$

が成立する．よって，

$$(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_s)AP = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_s)QB$$

が成り立つ．両辺とも $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_s$ による１次結合の組からなる．このとき，基底の１次独立性に注意すると，定理 5.4.1 による１次結合の表現の一意性により，

$$AP = QB$$

である．よって，

$$B = Q^{-1}AP$$

である． ■

とくに，基底の取り換えによる線形変換の表現行列への影響について，定理 5.8.7 により次の系をえる．

系 5.8.8 $f : V \to V$ を有限次元線形空間 V 上の線形変換とする．V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r\}$ に関する f の表現行列を A とする．また，V の別の基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \dots, \boldsymbol{v}'_r\}$ に関する f の表現行列を B とする．

このとき，V の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_s\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \dots, \boldsymbol{v}'_r\}$ への基底変換の行列を P とすると，f の表現行列 A と B の間には，次の関係式が成立する．

$$B = P^{-1}AP$$

例 5.8.4 例題 5.8.2 において，例題の線形写像 $\varphi : \boldsymbol{R}[x]_2 \to \boldsymbol{R}[x]_2$ についての，基底 $\{x^2, x, 1\}$ に関する表現行列は $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であった．また，基底 $\{x^2, x^2 + x, x^2 +$

$x+1\}$ に関する φ の表現行列は $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ であった．基底 $\{x^2,x,1\}$ から基底 $\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$ への基底変換の行列は $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ である．実際に，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=B$$

が成り立つことを確認することができる．

例 5.8.5 n 次正方行列 A が定める線形変換 $f_A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ に対する $\boldsymbol{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ に関する表現行列は A 自身である．正則行列 P により標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ を変換させて得られた $\boldsymbol{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\ldots,\boldsymbol{p}_n\}$ について，この新しい基底に関する f_A の表現行列は，系 5.8.8 により，

$$B=P^{-1}AP$$

で与えられる．

したがって，第 4 章で学習した行列の対角化は，「n 次正方行列 A が正則行列 P により対角化されるとき，P を基底変換の行列として $\boldsymbol{R}^n$ の標準基底を変換することで，新しい基底に関する線形変換 f_A の表現行列 B を対角行列 $B=P^{-1}AP$ という計算しやすい簡単な行列にすることができる」ということを意味する．

r 次元線形空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_r\}$ に関する座標 $\varphi_V:V\to\boldsymbol{R}^r$ と s 次元線形空間 W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_s\}$ に関する座標 $\psi_W:W\to\boldsymbol{R}^s$，および，これらの基底に関する線形写像 $f:V\to W$ の表現行列 A の間の関係として，

$$f_A=\psi_W^{-1}\circ f\circ\varphi_V$$

，すなわち，次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc}V & \xrightarrow{\varphi_V} & \boldsymbol{R}^r\\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_A}\\ W & \xrightarrow{\psi_W} & \boldsymbol{R}^s\end{array}$$

r 次元線形空間に 1 組の基底が指定されると，その線形空間は座標を通じて数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^r$ と見なすことができ（定理 5.8.5），線形写像はその表現行列が定める線形写像と考えることができる．したがって，有限次元線形空間やその間の線形写像について調べたいことがあるとき，基底がわかりさえすれば，座標を使って数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^r$ や行列に関する問題として調べ，再度座標を与える線形写像の逆写像を通じて当初の線形空間の元として捉えなおせばよい．

5.8.3 内積空間における線形変換

$\boldsymbol{R}$ 上の内積空間 V 上の線形変換 $f: V \to V$ が

$$(f(\boldsymbol{x}),\, f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in V)$$

をみたすとき，f を V 上の**直交変換**という．

定理 5.8.9 $\boldsymbol{R}$ 上の有限次元内積空間 V 上の線形変換 $f: V \to V$ が直交変換であるための必要十分条件は，V の正規直交基底に関する f の表現行列が直交行列であることである．

[**証明**] $\dim V = n$ とし，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の正規直交基底とする．また，正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する f の表現行列を $A = (a_{ij})$ とすると，$f(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{v}_k$ であるので，

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{v}_i),\, f(\boldsymbol{v}_j)) &= (\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{v}_k,\ \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\boldsymbol{v}_\ell) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{kj}a_{\ell j}(\boldsymbol{v}_k,\, \boldsymbol{v}_\ell) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{kj}a_{\ell j}\delta_{k\ell} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}\end{aligned}$$

である．

f が直交変換であるとすると，$(f(\boldsymbol{v}_i),\, f(\boldsymbol{v}_j)) = (\boldsymbol{v}_i,\, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$ であるので，

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \tag{B21}$$

である．等式 (B21) の左辺は ${}^t\!AA$ の (i, j) 成分であるので，等式 (B21) より，${}^t\!AA = E$ である．すなわち，f の表現行列 A は直交行列である．

逆に，f の表現行列 A が直交行列であるとすると，上記の議論により，$(f(\boldsymbol{v}_i),\, f(\boldsymbol{v}_j)) = \delta_{ij}$ であることがわかる．

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ が 1 次結合

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n, \quad \boldsymbol{y} = \mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_n\boldsymbol{v}_n$$

と表されているとする．このとき，f は線形写像なので，

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}) &= \lambda_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \lambda_n f(\boldsymbol{v}_n), \\ f(\boldsymbol{y}) &= \mu_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \mu_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + \mu_n f(\boldsymbol{v}_n)\end{aligned}$$

である．

よって，

$$\begin{aligned}
(f(\boldsymbol{x}),\ f(\boldsymbol{y})) &= (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(\boldsymbol{v}_i),\ \sum_{j=1}^{n}\mu_j f(\boldsymbol{v}_j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j(f(\boldsymbol{v}_i),\ f(\boldsymbol{v}_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i \\
(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) &= (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{v}_i,\ \sum_{j=1}^{n}\mu_j\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j(\boldsymbol{v}_i,\ \boldsymbol{v}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i
\end{aligned}$$

が成立し，$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つ．したがって，f は直交変換である． ■

同様に，$\boldsymbol{C}$ 上の内積空間 V 上の線形変換 $f : V \to V$ についても，線形変換 f が

$$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$$

をみたすとき，f を V 上の**ユニタリ変換**という．このとき，定理 5.8.9 と同様にして，次の定理を証明することができる．

定理 5.8.10　$\boldsymbol{C}$ 上の有限次元内積空間 V 上の線形変換 $f : V \to V$ がユニタリ変換であるための必要十分条件は，V の正規直交基底に関する f の表現行列がユニタリ行列であることである．

演習問題

以下は，教科書では取り上げなかった部分の演習問題である．

5.17 線形空間 V において，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in V$ が

$$\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{d} = 3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

をみたすとき，次の等式が成立することを示せ．
(1)　$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$
(2)　$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \rangle$

5.18 実数列全体からなる線形空間 S の部分集合 F を

$$F = \{\{a_n\} \in S \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n \geqq 1)\}$$

と定める．このとき，次の各問に答えよ．
(1)　F は S の部分空間であることを示せ．
(2)　F の 1 組の基底と次元を求めよ．

5.19 W_1, W_2 を有限次元線形空間 V の部分空間とする．このとき，$W_1 \subset W_2$ かつ $\dim W_1 = \dim W_2$ であるならば，$W_1 = W_2$ であることを証明せよ．

5.20 数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を次のように定める．

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 部分空間 W_1, W_2 各々の 1 組の基底と次元を求めよ．

(2) 共通空間 $W_1 \cap W_2$ の 1 組の基底と次元を求めよ．

(3) 和空間 $W_1 + W_2$ の 1 組の基底と次元を求めよ．

5.21 集合 D 上で定義された実数値関数全体からなる線形空間 $F(D, \boldsymbol{R})$ の部分集合 W_{odd}，W_{even} を

$$W_{\text{odd}} = \{f(x) \in F(D, \boldsymbol{R}) \mid f(-x) = -f(x)\}$$
$$W_{\text{even}} = \{f(x) \in F(D, \boldsymbol{R}) \mid f(-x) = f(x)\}$$

と定める．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) W_{odd}，W_{even} が $F(D, \boldsymbol{R})$ の部分空間であることを示せ．

(2) $F(D, \boldsymbol{R}) = W_{\text{odd}} \oplus W_{\text{even}}$ であることを示せ．

5.22 A を $A^2 = A$ をみたす n 次実正方行列とし，$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 W_1, W_2 を次のように定める．

$$W_1 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}, \quad W_2 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

このとき，$\boldsymbol{R}^n = W_1 \oplus W_2$ であることを示せ．

5.23 線形写像 $f : V \to W$ について，f が単射であるための必要十分条件は $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$ であることを証明せよ．

5.24 線形空間 $\boldsymbol{R}[x]_2$ に対して，写像 $\varphi : \boldsymbol{R}[x]_2 \to \boldsymbol{R}[x]_2$ を $\varphi(f(x)) = 2f'(x)(x+1) - f'(x)(x^2+x+1)$ で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 写像 φ は $\boldsymbol{R}[x]_2$ 上の線形変換であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}[x]_2$ における基底 $\{x^2, x, 1\}$ に関する φ の表現行列を求めよ．

(3) 線形変換 φ の核 $\operatorname{Ker}\varphi$ の 1 組の基底と次元を求めよ．

(4) 線形変換 φ の像 $\operatorname{Im}\varphi$ の 1 組の基底と次元を求めよ．

5.25 $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間 $C([-1,\ 1])$ の内積 $(\ ,\ )$ を

$$(f,\, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx \quad (f,\, g \in C([-1,\ 1])$$

で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $C([-1,\ 1])$ のベクトルの組 $1,\ e^x,\ xe^x$ は１次独立であることを示せ．ただし，1 は常に 1 の値をとる定数値関数を表す.

(2) グラム・シュミットの直交化法を用いて，$\{1,\ e^x,\ xe^x\}$ を正規直交系になおせ.

5.26 $\boldsymbol{R}$ 上の内積空間 V 上の線形変換 $f : V \to V$ について，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ であるとき，f を等長変換という．このとき，次を証明せよ.

$$f \text{ は直交変換である} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ は等長変換である}$$

5.27 $\boldsymbol{C}$ 上の内積空間 V において，次の等式が成立することを示せ.

(1) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V)$

(2) $(\boldsymbol{a},\ \lambda\boldsymbol{b}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) \quad (\boldsymbol{a} \in V, \lambda \in \boldsymbol{C})$