演 習 問 題 解 答 例

8.1.1 (1) $\cosh ax = \dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$ より，指数関数のラプラス変換を用いると，

$$\mathcal{L}[\cosh ax](s) = \frac{\mathcal{L}[e^{ax}](s)+\mathcal{L}[e^{-ax}](s)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

(2) $\sinh ax = \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$ より，指数関数のラプラス変換を用いると，

$$\mathcal{L}[\sinh ax](s) = \frac{\mathcal{L}[e^{ax}](s)-\mathcal{L}[e^{-ax}](s)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}.$$

(3) $\mathcal{L}[\cos bx](s) = \dfrac{s}{s^2+b^2}$ と第一移動法則より，

$$\mathcal{L}[e^{ax}\cos bx](s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

(4) $\mathcal{L}[\sin bx](s) = \dfrac{b}{s^2+b^2}$ と第一移動法則より，

$$\mathcal{L}[e^{ax}\sin bx](s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}.$$

(5) $\mathcal{L}[x^n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ と第一移動法則より，

$$\mathcal{L}[e^{ax}x^n](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

(6) $\cos(ax+b) = \cos(ax)\cos b - \sin(ax)\sin b$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(ax+b)](s) &= \mathcal{L}[\cos ax](s)\cos b - \mathcal{L}[\sin ax](s)\sin b\\ &= \frac{s}{s^2+a^2}\cos b - \frac{a}{s^2+a^2}\sin b\\ &= \frac{s\cos b - a\sin b}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

(7) $\sin^2 ax = \dfrac{1-\cos 2ax}{2}$ より，

$$\mathcal{L}[\sin^2 ax](s) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{L}[1](s)-\mathcal{L}[\cos 2ax](s)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4a^2}\right\} = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}.$$

(8) ラプラス変換の微分より，

$$\mathcal{L}[x\cos ax](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos ax](s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}.$$

(9) ラプラス変換の微分より，(4) の結果を用いると，

$$\mathcal{L}[xe^{ax}\sin bx](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{ax}\sin bx](s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right) = \frac{2b(s-a)}{\{(s-a)^2+b^2\}^2}.$$

8.1.2 (1) $\mathcal{L}[x](s) = \dfrac{1}{s^2}$ であるので，第一移動法則より $\mathcal{L}[xe^{2x}](s) = \dfrac{1}{(s-2)^2}$ である．よって答えは xe^{2x}.

(2) 与式を部分分数分解すると，

$$\frac{s}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2}$$

と変形できる．ラプラス変換して右辺になる関数は $1 \cdot e^{2x} + 2x \cdot e^{2x}$ であるので, 答えは $(1+2x)e^{2x}$.

(3) 与式を部分分数分解すると，

$$\frac{2}{s(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s}$$

と変形できる．ラプラス変換して右辺になる関数は $1 \cdot e^{2x} - 1$ であるので，答えは $e^{2x} - 1$.

(4) 与式を変形すると

$$\frac{s-4}{s^2+4} = \frac{s}{s^2+2^2} - 2 \cdot \frac{2}{s^2+2^2}$$

となり, ラプラス変換して右辺になる関数は $\cos 2x - 2\sin 2x$ であるので, 答えは $\cos 2x - 2\sin 2x$.

(5) 与式を変形すると

$$\frac{s+1}{s^2+2s+5} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}$$

となり，ラプラス変換して右辺になる関数は $e^{-x}\cos 2x$ であるので，答えは $e^{-x}\cos 2x$.

(6) 与式を変形すると

$$\frac{2s}{s^2+2s+5} = \frac{2(s+1)-2}{(s+1)^2+2^2} = 2 \cdot \frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

となり，ラプラス変換して右辺になる関数は $2\cos(2x) \cdot e^{-x} - \sin(2x) \cdot e^{-x}$ であるので，答えは $e^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x)$.

(7) 与式を部分分数分解すると

$$\frac{4}{s(s^2+4)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+2^2}$$

となり，ラプラス変換して右辺になる関数は $1 - \cos 2x$ であるので，答えは $1 - \cos 2x$.

(8) 与式は

$$\frac{4s}{(s^2+4)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin 2x](s)$$

であるので，ラプラス変換の微分を用いると，求める答えは $x\sin 2x$.

(9) 与式を変形すると

$$\frac{16}{(s^2+4)^2} = \frac{2}{s^2+2^2} + 2 \cdot \frac{4-s^2}{(s^2+2^2)^2} = \frac{2}{s^2+2^2} + 2 \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right) = \frac{2}{s^2+2^2} + 2\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos 2x](s)$$

となり，ラプラス変換して右辺になる関数は $\sin 2x - 2x\cos 2x$ であるので，答えは $\sin 2x - 2x\cos 2x$.

8.1.3 (1) 微分方程式の両辺をラプラス変換すると，

$$sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

より，$y(0) = 0$ に注意すると，

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}\right)$$

が得られる．ラプラス変換して右辺になる関数は $\frac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})=\frac{1}{2}\sinh 2x$ であるので，求める解は $y=\frac{1}{2}\sinh 2x$.

(2) 微分方程式の両辺をラプラス変換すると，

$$sY(s)-y(0)+2Y(s)=\frac{1}{s+2}$$

より，$y(0)=0$ に注意すると，

$$Y(s)=\frac{1}{(s+2)^2}$$

が得られる．ラプラス変換して右辺になる関数は xe^{-2x} であるので，求める解は $y=xe^{-2x}$.

(3) 微分方程式の両辺をラプラス変換すると，

$$sY(s)-y(0)+2Y(s)=\frac{4}{s^2}$$

より，$y(0)=0$ に注意すると，

$$Y(s)=\frac{4}{s^2(s+2)}=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s+2}$$

が得られる．ラプラス変換して右辺になる関数は $-1+2x+e^{-2x}$ であるので，求める解は $y=2x-1+e^{-2x}$.

(4) 微分方程式の両辺をラプラス変換すると，

$$sY(s)-y(0)+2Y(s)=\frac{4s}{s^2+4}$$

より，$y(0)=0$ に注意すると，

$$Y(s)=\frac{4s}{(s^2+4)(s+2)}=\frac{s}{s^2+2^2}+\frac{2}{s^2+2^2}-\frac{1}{s+2}$$

が得られる．ラプラス変換して右辺になる関数は $\cos 2x+\sin 2x-e^{-2x}$ であるので，求める解は $y=\cos 2x+\sin 2x-e^{-2x}$.

(5) 微分方程式の両辺をラプラス変換すると，

$$\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}+3\{sY(s)-y(0)\}+2Y(s)=\frac{2}{s}$$

より，$y(0)=1$，$y'(0)=0$ に注意すると，

$$Y(s)=\frac{1}{s}$$

が得られる．ラプラス変換して右辺になる関数は 1 であるので，求める解は $y=1$.

(6) 微分方程式の両辺をラプラス変換すると，

$$\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}+2\{sY(s)-y(0)\}+Y(s)=\frac{2}{s}$$

より，$y(0)=1$，$y'(0)=0$ に注意すると，

$$Y(s)=\frac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2}=\frac{2}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}$$

が得られる．ラプラス変換して右辺になる関数は $2-1\cdot e^{-x}-x\cdot e^{-x}$ であるので，求める解は $y=2-(1+x)e^{-x}$.

(7) 微分方程式の両辺をラプラス変換すると，

$$\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + 3\{sY(s) - y(0)\} + 2Y(s) = \frac{2}{s+3}$$

より，$y(0) = 1$，$y'(0) = 0$ に注意すると，

$$Y(s) = \frac{s^2+6s+11}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

が得られる．ラプラス変換して右辺になる関数は $3e^{-x} - 3e^{-2x} + e^{-3x}$ であるので，求める解は $y = 3e^{-x} - 3e^{-2x} + e^{-3x}$.

(8) 微分方程式の両辺をラプラス変換すると，

$$\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + 3\{sY(s) - y(0)\} + 2Y(s) = \frac{10}{s^2+1}$$

より，$y(0) = 1$，$y'(0) = 0$ に注意すると，

$$Y(s) = \frac{s^3+3s^2+s+13}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} = \frac{7}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s^2+1} - 3\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

が得られる．ラプラス変換して右辺になる関数は $7e^{-x} - 3e^{-2x} + \sin x - 3\cos x$ であるので，求める解は $y = 7e^{-x} - 3e^{-2x} + \sin x - 3\cos x$.

(9) 微分方程式の両辺をラプラス変換すると，

$$\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + 3\{sY(s) - y(0)\} + 2Y(s) = \frac{4}{s^2}$$

より，$y(0) = 1$，$y'(0) = 0$ に注意すると，

$$Y(s) = \frac{s^3+3s^2+4}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{6}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

が得られる．ラプラス変換して右辺になる関数は $2x - 3 + 6e^{-x} - 2e^{-2x}$ であるので，求める解は $y = 2x - 3 + 6e^{-x} - 2e^{-2x}$.

(10) 微分方程式の両辺をラプラス変換すると，

$$\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + 2\{sY(s) - y(0)\} + 5Y(s) = \frac{5}{s+2}$$

より，$y(0) = 1$，$y'(0) = 0$ に注意すると，

$$Y(s) = \frac{s^2+4s+9}{(s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s^2+2s+5} = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

が得られる．ラプラス変換して右辺になる関数は $e^{-2x} + \sin(2x)\cdot e^{-x}$ であるので，求める解は $y = e^{-2x} + e^{-x}\sin 2x$.

8.2.1 (1) $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$ とおいて方程式 $y' = -2y$ に代入すると，左辺は

$$y' = c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1} + (n+1)c_{n+1}x^n + \cdots$$

となり，右辺は

$$-2y = -2c_0 - 2c_1x - 2c_2x^2 + \cdots - 2c_{n-1}x^{n-1} - 2c_nx^n + \cdots$$

となるので，係数比較により，

$$nc_n = -2c_{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

が成り立たねばならない．したがって c_k は

$$c_k = \frac{-2}{k}c_{k-1} = \frac{-2}{k}\frac{-2}{k-1}c_{k-2} = \cdots = \frac{(-2)^k}{k!}c_0$$

と表されることがわかる．よって求める解は，c_0 を任意定数として

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}x^k$$

である．

(2) 斉次方程式 $y' + 2y = 0$ の一般解は，c_0 を任意定数として (1) のように表せる．また $y = 1$ は与えられた方程式 $y' + 2y = 2$ の特殊解である．よって求める解は，c_0 を任意定数として

$$y = 1 + c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}x^k$$

である．

(3) 斉次方程式 $y' - 2xy = 0$ の一般解は，例題 8.2.1 のようにして，c_0 を任意定数として

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}x^{2k}$$

と表せる．また $y = -1$ は与えられた方程式 $y' - 2xy = 2x$ の特殊解である．よって求める解は，c_0 を任意定数として

$$y = -1 + c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}x^{2k}$$

である．

(4) $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$ とおいて方程式 $y'' = 4y$ に代入すると，左辺は

$$y'' = 1 \cdot 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + \cdots + (n-1)nc_nx^{n-2} + n(n+1)c_{n+1}x^{n-1} + \cdots$$

となり，右辺は

$$4y = 4c_0 + 4c_1x + 4c_2x^2 + \cdots + 4c_{n-1}x^{n-1} + 4c_nx^n + \cdots$$

となるので，係数比較により，

$$n(n+1)c_{n+1} = 4c_{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

が成り立たねばならない．この式より，$n = 2k$（$k = 0, 1, 2, \ldots$）の場合は

$$c_{2k} = \frac{4}{(2k)(2k-1)}c_{2(k-1)} = \frac{4}{(2k)(2k-1)}\frac{4}{(2k-2)(2k-3)}c_{2(k-2)} = \cdots = \frac{4^k}{(2k)!}c_0$$

と表せ，$n = 2k+1$ の場合は

$$c_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)(2k)}c_{2(k-1)+1} = \frac{4}{(2k+1)(2k)}\frac{4}{(2k-1)(2k-2)}c_{2(k-2)+1} = \cdots = \frac{4^k}{(2k+1)!}c_1$$

と表せることがわかる．よって求める解は，c_0 と c_1 を任意定数として

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(2k)!} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

である．

(5) $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$ とおいて方程式 $y'' = -4y$ に代入すると，左辺は

$$y'' = 1 \cdot 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + \cdots + (n-1)nc_n x^{n-2} + n(n+1)c_{n+1}x^{n-1} + \cdots$$

となり，右辺は

$$-4y = -4c_0 - 4c_1 x - 4c_2 x^2 - \cdots - 4c_{n-1}x^{n-1} - 4c_n x^n - \cdots$$

となるので，係数比較により，

$$n(n+1)c_{n+1} = -4c_{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

が成り立たねばならない．この式より，$n = 2k$（$k = 0, 1, 2, \ldots$）の場合は

$$c_{2k} = \frac{-4}{(2k)(2k-1)} c_{2(k-1)} = \frac{-4}{(2k)(2k-1)} \frac{-4}{(2k-2)(2k-3)} c_{2(k-2)} = \cdots = \frac{(-4)^k}{(2k)!} c_0$$

と表せ，$n = 2k+1$ の場合は

$$c_{2k+1} = \frac{-4}{(2k+1)(2k)} c_{2(k-1)+1} = \frac{-4}{(2k+1)(2k)} \frac{-4}{(2k-1)(2k-2)} c_{2(k-2)+1} = \cdots = \frac{(-4)^k}{(2k+1)!} c_1$$

と表せることがわかる．よって求める解は，c_0 と c_1 を任意定数として

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k)!} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

である．

(6) $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$ とおいて方程式 $y'' = x^2 y'' + xy'$ に代入すると，左辺は

$$y'' = 1 \cdot 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + \cdots + (n-1)nc_n x^{n-2} + n(n+1)c_{n+1}x^{n-1} + \cdots$$

となり，右辺は

$$\begin{aligned}
&x^2 y'' + xy' \\
&= \{1 \cdot 2c_2 x^2 + 2 \cdot 3c_3 x^3 + \cdots + (n-3)(n-2)c_{n-2}x^{n-2} + (n-2)(n-1)c_{n-1}x^{n-1} + \cdots\} \\
&\quad + \{c_1 x + 2c_2 x^2 + \cdots + (n-2)c_{n-2}x^{n-2} + (n-1)c_{n-1}x^{n-1} + \cdots\} \\
&= 0 + 1^2 c_1 x + 2^2 c_2 x^2 + \cdots + (n-2)^2 c_{n-2} x^{n-2} + (n-1)^2 c_{n-1} x^{n-1} + \cdots
\end{aligned}$$

となるので，係数比較により，

$$n(n+1)c_{n+1} = (n-1)^2 c_{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

が成り立たねばならない．この式より，$n = 1$ のとき $c_2 = 0$ となることに注意すると，$n = 2k$（$k = 1, 2, \ldots$）の場合は $c_n = 0$ である．また $n = 2k+1$ の場合は，関係式 $(2k)(2k+1)c_{2k+1} = (2k-1)^2 c_{2(k-1)-1}$ から，いったん $b_k = (2k+1)c_{2k+1}$ とおくと，

$$b_k = \frac{2k-1}{2k} b_{k-1} = \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} b_{k-2} = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots 4 \cdot 2} b_0$$

より，

$$c_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot c_1$$

と表せることがわかる．よって求める解は，c_0 と c_1 を任意定数として

$$y = c_0 + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2} x^{2k+1}$$

である．

(7) $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$ とおいて方程式 $y'' = x^2y'' + 2xy' - 2y$ に代入すると，左辺は

$$y'' = 1\cdot 2c_2 + 2\cdot 3c_3x + \cdots + (n-1)nc_nx^{n-2} + n(n+1)c_{n+1}x^{n-1} + \cdots$$

となり，右辺は

$$\begin{aligned}
&x^2y'' - 2xy' + 2y \\
&= \{1\cdot 2c_2x^2 + 2\cdot 3c_3x^3 + \cdots + (n-3)(n-2)c_{n-2}x^{n-2} + (n-2)(n-1)c_{n-1}x^{n-1} + \cdots\} \\
&\quad + 2\{c_1x + 2c_2x^2 + \cdots + (n-2)c_{n-2}x^{n-2} + (n-1)c_{n-1}x^{n-1} + \cdots\} \\
&\quad - 2\{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots\} \\
&= ((-1)\cdot 2)c_0 + (0\cdot 2)c_1x + (1\cdot 3)c_2x^2 + \cdots + (n-3)nc_{n-2}x^{n-2} + (n-2)(n+1)c_{n-1}x^{n-1} + \cdots
\end{aligned}$$

となるので，係数比較により，

$$n(n+1)c_{n+1} = (n-2)(n+1)c_{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

が成り立たねばならない．この式より，$n=2$ のとき $c_3 = 0$ となることに注意すると，$n = 2k+1$（$k = 1, 2, \ldots$）の場合は $c_n = 0$ である．また $n = 2k$ の場合は，関係式 $(2k-1)c_{2k} = (2k-2)c_{2(k-1)}$ から，いったん $b_k = (2k-1)c_{2k}$ とおくと，

$$b_k = b_{k-1} = \cdots = b_1 = b_0$$

より，

$$c_{2k} = \frac{1}{2k-1}(-c_0)$$

と表せることがわかる．よって求める解は，c_0 と c_1 を任意定数として

$$y = c_1x - c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k}$$

である．

(8) まず，斉次方程式 $y'' + xy + 2y = 0$ の一般解を求める．$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$ とおいて方程式 $y'' = -xy' - 2y$ に代入すると，左辺は

$$y'' = 1\cdot 2c_2 + 2\cdot 3c_3x + \cdots + (n-1)nc_nx^{n-2} + n(n+1)c_{n+1}x^{n-1} + \cdots$$

となり，右辺は

$$\begin{aligned}
-xy' - 2y &= -\{c_1x + 2c_2x^2 + \cdots + (n-2)c_{n-2}x^{n-2} + (n-1)c_{n-1}x^{n-1} + \cdots\} \\
&\quad - 2\{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots\} \\
&= -2c_0 - 3c_1x - 4c_2x^2 - \cdots - nc_{n-2}x^{n-2} - (n+1)c_{n-1}x^{n-1} - \cdots
\end{aligned}$$

となるので，係数比較により，

$$n(n+1)c_{n+1} = -(n+1)c_{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

が成り立たねばならない．この式より，$n = 2k$（$n = 1, 2, \cdots$）の場合は

$$c_{2k} = \frac{-1}{2k-1}c_{2(k-1)} = \frac{(-1)^2}{(2k-1)(2k-3)}c_{2(k-2)} = \cdots = \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}c_0$$

と表せ，$n = 2k+1$ の場合は

$$c_{2k+1} = \frac{-1}{2k}c_{2(k-1)+1} = \frac{(-1)^2}{(2k)(2k-2)}c_{2(k-1)+1} = \cdots = \frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}c_1$$

と表せる．よって斉次方程式 $y'' + xy + 2y = 0$ の一般解は

$$y = c_0 + c_1 x + c_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}x^{2k} + c_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}x^{2k+1}$$

である．一方，$y = x$ は与えられた非斉次方程式 $y'' + xy + 2y = 3x$ の特殊解である．よって求める一般解は

$$y = c_0 + (c_1+1)x + c_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}x^{2k} + c_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}x^{2k+1}$$

である．

8.3.1 (1) 略．大まかには略解の通り．

(2) 略．大まかには略解の通り．

(3) 略．大まかには略解の通り．