第 7 章

7.1.1

(1) 特性方程式 $\lambda^2+6\lambda+9=0$ は重解 $\lambda=-3$ を持つので，微分方程式 $x''+6x'+9x=0$ の基本解は e^{-3t}, te^{-3t} である．よって，$t\to+\infty$ のとき，解 $x(t)$ は $x(t)\to 0$ となる．
(2) 特性方程式 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ は $\lambda=-1, 3$ を持つので，微分方程式 $x''-2x'-3x=0$ の基本解は e^{-t}, e^{3t} である．$x'(0)=a$ とすると，初期条件を満たす解は $x(t)=\dfrac{3-a}{4}e^{-t}+\dfrac{a+1}{4}e^{3t}$ である．このとき，$e^{-t}\to 0, e^{3t}\to+\infty$ $(t\to+\infty)$ なので，解 $x(t)$ は (i) $a>-1$ のとき，$x(t)\to+\infty$ $(t\to+\infty)$ (ii) $a=-1$ のとき，$x(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$ (iii) $a<-1$ のとき，$x(t)\to-\infty$ $(t\to+\infty)$ となる．
(3) 特性方程式 $\lambda^2+4\lambda+3=0$ は $\lambda=-1, -3$ を持つので，微分方程式 $x''+4x'+3x=0$ の基本解は e^{-t}, e^{-3t} である．このとき，$e^{-t}\to 0, e^{-3t}\to 0$ $(t\to+\infty)$ なので，解 $x(t)$ は $x(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$ となる．
(4) 特性方程式 $\lambda^2+6\lambda+10=0$ は虚数解 $\lambda=-3\pm i$ を持つので，微分方程式 $x''+6x'+10x=0$ の基本解は $e^{-3}\cos t$, $e^{-3t}\sin t$ である．このとき，$e^{-3t}\to 0$ $(t\to+\infty)$ なので，解 $x(t)$ は $x(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$ となる．
(5) 特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+4=0$ は重解 $\lambda=2$ を持つので，微分方程式 $x''-4x'+4x=0$ の基本解は e^{2t}, te^{2t} である．$x'(0)=a$ とすると，初期条件を満たす解は $x(t)=(1+(a-2)t)e^{2t}$ である．このとき，$e^{2t}\to+\infty, te^{2t}\to+\infty$ $(t\to+\infty)$ なので，(i) $a\geq 2$ のとき，$x(t)\to+\infty$ $(t\to+\infty)$ (ii) $a<2$ のとき，$x(t)\to-\infty$ $(t\to+\infty)$ となる．

7.1.2

特性方程式 $\lambda^2+9\lambda=0$ は虚数解 $\lambda=\pm 3i$ をもつので，対応する斉次微分方程式 $x''+9x=0$ の一般解は $y=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t \quad (C_1, C_2$は任意定数$)$ である．それぞれの非斉次微分方程式を解くと（例えば，未定係数法で解くと），(i) の一般解は $x(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\dfrac{1}{8}\sin t$ であり，(ii) の一般解は $x(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\dfrac{t}{6}\cos 3t$ である．ここで，初期条件を満たすようにそれぞれの C_1, C_2 を求めると，求める解を得ることができる．(i) の解 x_1 は $x_1(t)=\cos 3t-\dfrac{1}{24}\sin 3t+\dfrac{1}{8}\sin t$ であり，(ii) の解 $x_2(t)$ は $x_2(t)=\left(1+\dfrac{t}{6}\right)\cos 3t-\dfrac{1}{18}\sin 3t$ である．(i) の解は周期関数として一定の振れ幅であるが，解 (ii) の方は振れ幅が増大する．すなわち，解 (ii) の方は $|x(t)|\to+\infty(t\to+\infty)$ である．これは，(ii) の場合，元々バネが持っている固有の周期と強制外力 $f(t)=-\sin 3t$ の周期が同じであったため同調し，共鳴という現象が起こったからである．

7.2.1

(1) 微分方程式 (7.4) の解 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{x}(t+c)$ とし，$\boldsymbol{u}(t)=\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix}$ とおく．このとき，$u(t)=x(t+c), v(t)=y(t+c)$ である．ここで，$s=t+c$ とおくと，

$\dfrac{ds}{dt} = 1$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{d}{dt}x(s) = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} \\ &= f_1(x(s),\, y(s)) = f_1(u(t),\, v(t))\end{aligned}$$

である．同様に，

$$\frac{dv}{dt} = f_2(u(t),\, v(t))$$

であることを確かめることができる．

よって，$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{x}(t+c)$ は微分方程式 (7.4) を満たし，(7.4) の解である．

(2) 背理法により証明する．2 つの解曲線が点 $\boldsymbol{a}$ で交わったと仮定する．このとき，

$$\boldsymbol{x}_1(t_1) = \boldsymbol{x}_2(t_2) = \boldsymbol{a}$$

を満たす $t_1,\, t_2$ が存在する．$c = t_1 - t_2$ に対して，$\boldsymbol{x}_3(t) = \boldsymbol{x}_1(t+c)$ とおくと，(1) により $\boldsymbol{x}_3(t)$ も解曲線である．

$$\boldsymbol{x}_3(t_2) = \boldsymbol{x}_1(t_2 + c) = \boldsymbol{x}_1(t_1) = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}_2(t_2)$$

なので，2 つの解曲線 $\boldsymbol{x}_2,\, \boldsymbol{x}_3$ は $t = t_2$ で同一の初期条件を満たす．微分方程式の解の一意性により，これらは一致しなければならない．すなわち，

$$\boldsymbol{x}_2(t) = \boldsymbol{x}_3(t) = \boldsymbol{x}_1(t+c)$$

となり，曲線として 2 つの解曲線 $\boldsymbol{x}_1(t),\, \boldsymbol{x}_2(t)$ は同じである．矛盾．

7.2.2

相図は図 1.

(1) A の固有値は $\lambda = -2,\, 5$ なので，鞍点である．(2) A の固有値は $\lambda = -2,\, -1$ なので，漸近安定結節点である．(3) A の固有値は $\lambda = 1,\, 3$ なので，不安定結節点である．(4) A の固有値は $\lambda = 3$（重解） なので，不安定結節点である．(5) A の固有値は $\lambda = 3 \pm \sqrt{2}i$ なので，不安定渦状点である．(6) A の固有値は $\lambda = \pm 2i$ なので，渦心点である．

7.2.3

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 - 2x + xy = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

を解くことにより，平衡点は $(x,\, y) = (0,\, 0),\, (1,\, 1),\, (-2,\, 4)$ であることがわかる．

方程式のヤコビ行列 J を求めると，

$$J = \begin{pmatrix} 2x - 2 + y & x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

である．

点 $(x,\, y) = (0,\, 0)$ におけるヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり，固有値は $\lambda = -2,\, -1$ である．これは漸近安定結節点である．

点 $(x,\, y) = (1,\, 1)$ におけるヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

であり，固有値は $\lambda = \pm\sqrt{3}$ である．これは鞍点である．

点 $(x,\, y) = (-2,\, 4)$ におけるヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

であり，固有値は $\lambda = \dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$ である．これは鞍点である．

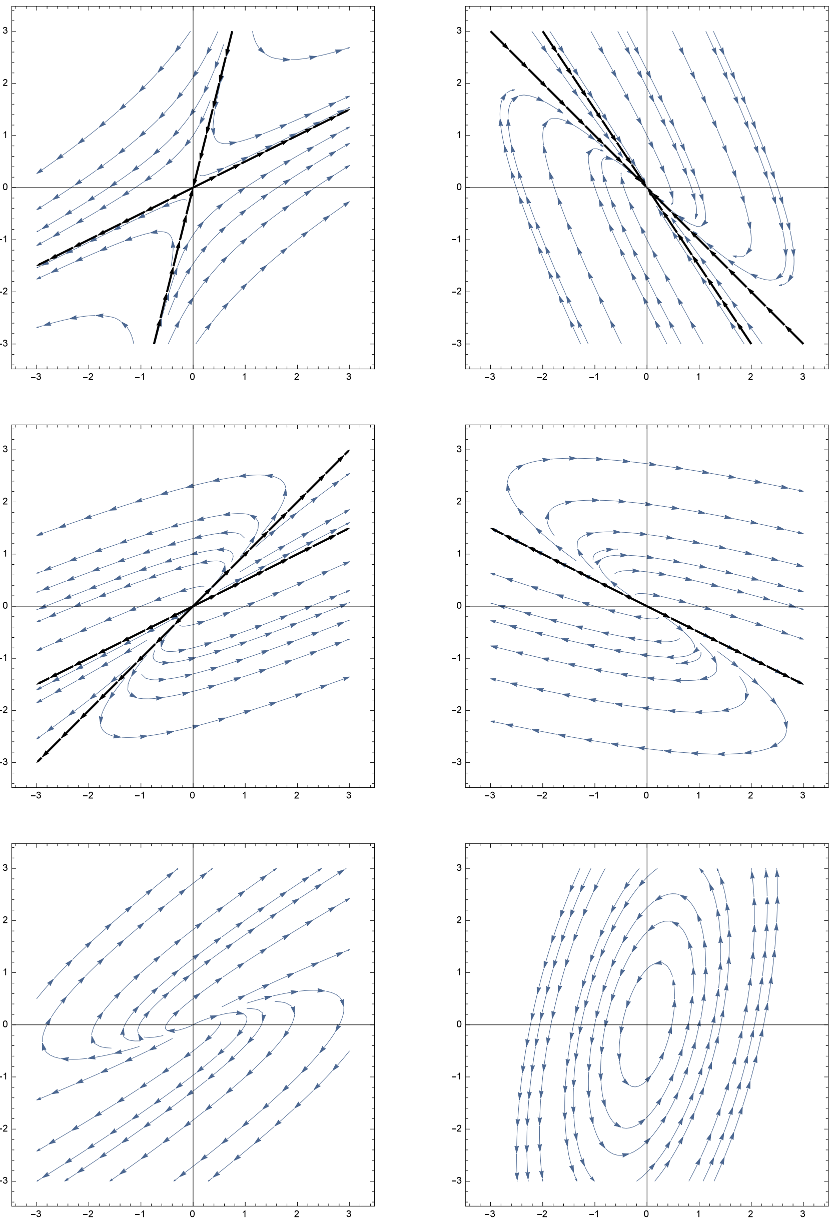

図 1: 演習問題 7.2.2 の相図：(1) 上段左　(2) 上段右　(3) 中段左　(4) 中段右　(5) 下段左　(6) 下段右