5 章，6 章の演習問題詳細解答

第 5 章

5.2.1

(1) $W(\cos 2x, \sin 2x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2(\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 2 \neq 0$. よって 1 次独立.

(2) 任意の x に対して，$ae^{2x} + bxe^{2x} = e^{2x}(a+bx) = 0$ とすると，$a + bx = 0$ である．よって，$a = 0, b = 0$ でなければいけないので，e^{2x}, xe^{2x} は 1 次独立である.

(3) 任意の x に対して，

$$ax\cos x + b(x+1)\sin x + c(x+2)\cos x = 0 \tag{1}$$

とする．$x = 0$ を (1) に代入すると，$2c = 0$ となり，$c = 0$ を得る．また，$x = \pi/2$ を代入すると，$b(\pi/2 + 1) = 0$ となり，$b = 0$ を得る．よって結局，(1) は $ax\cos x$ となり，$x = 2\pi$ を代入して，$a = 0$ を得る．以上より，$a = b = c = 0$ となるので，$x\cos x$, $(x+1)\sin x$, $(x+2)\cos x$ は 1 次独立である.

(4) $W(1, \cos x, \sin x) = 1$ となる．よって，1 次独立.

(5) $1 - \cos^2 x - \sin^2 x = 0$ であるので，$1, \cos^2 x, \sin^2 x$ は自明でない 1 次関係式を満たし，1 次従属である.

5.2.2 (1) x^3 (2) $e^{2px}q$ (3) $-6e^{2x}$

5.3.1 解であることは代入して確かめればよいので，省略する．それぞれの 1 次独立性はそのロンスキアンを計算することでわかる．それぞれのロンスキアンを挙げる．(1) $-e^{-x}$ (2) 1 (3) 2 (4) e^{-4x} (5) x^2

5.3.2 (1) の場合のみ，詳しい解答を書く．他は同様に解くことができる.

(1) 一般解は $y(x) = C_1 + C_2e^{-x}$ とおくことができる．$y(0) = 1, y'(0) = 2$ より，

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_2 = 2 \end{cases}$$

よって，$C_1 = 3, C_2 = -2$. よって，$y = 3 - 2e^{-x}$ が解となる.

(2) $y = \cos x + 3\sin x$ (3) $y = -2\cos 2x + 2\sin 2x$

(4) $y = e^{-2x} + 2xe^{-2x}$ (5) $y = x^2$

5.3.3 解であることは代入して確かめればよいので，省略する．それぞれの 1 次独立性のみを示す．(1) はロンスキアン $W = 2e^{3x}$，(2) は $W = 2$ であることより，1 次独立であることがわかる.

5.3.4 (1) の場合のみ，詳しい解答を書く．他は同様に解くことができる.

(1) 一般解は $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$ とおくことができる．$y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1$ より，

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 1 \end{cases}$$

よって，$C_1 = 1, C_2 = C_3 = 0$ となり，$y = e^x$ が解となる．

(2) $y = 1 - e^{-x}$

5.3.5 (1) $y = e^{\lambda x}$ を微分方程式に代入すると，$(\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3)e^{\lambda x} = 0$ となる．よって， $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ のとき，$e^{\lambda x}$ は微分方程式の解となる．よって，$\lambda = \pm 1, 3$ のとき，すなわち e^x, e^{-x}, e^{3x} が求める解である．

(2) $W = W\left(e^x, e^{-x}, e^{3x}\right) = -16e^{3x}$ であるので，e^x, e^{-x}, e^{3x} は 1 次独立である．微分方程式は 3 階線形微分方程式であるので，$\left\{e^x, e^{-x}, e^{3x}\right\}$ は基本解となる．

5.3.6 $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$ を y_1, y_2 のロンスキアンとする．初期条件 $y_1(x_0) = 2, y_1'(x_0) = 1, y_2(x_0) = -1, y_2'(x_0) = 2$ より，

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

よって，定理 5.2.1 より，y_1, y_2 は 1 次独立である．微分方程式は 2 階線形微分方程式であるので，これらが基本解となる．

5.3.7 y を斉次 n 階線形微分方程式（5.1.2) の解であるとする．$x_0 \in I$ を一つ固定しておく．$y(x_0) = K_0, y'(x_0) = K_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1}$ とする．(5.1.2) の解 $y_1, \ldots, y_n$ は仮定より，1 次独立であるので，定理 5.3.2 より，$W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$ となる．よって，連立方程式

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{n-1} \end{pmatrix}$$

の係数行列は正則行列になる．よって，両辺に係数行列の逆行列を左から掛けて，この方程式の解 ${}^t(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ を得る（ここで，行列 A に対して，${}^tA$ で A の転置行列を表す）．この解 ${}^t(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ に対して，$Y = c_1y_1 + \cdots, c_ny_n$ とすると，定理 5.3.1 より，Y もまた斉次線形微分方程式 (5.1.2) の解である．また，上記の連立方程式より，$Y(x_0) = c_1y_1(x_0) + \cdots, c_ny_n(x_0) = K_0 = y(x_0)$, $Y'(x_0) = c_1y_1'(x_0) + \cdots, c_ny_n'(x_0) = K_1 = y'(x_0)$, …, $Y^{(n-1)}(x_0) = c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots, c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0)$ を満たしている．以上と定理 5.1.1 より，$y = Y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ が結論づけられる．

5.3.8 ある $x_0 \in I$ で $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ とすると，定理 5.3.2 より，任意の $x \in I$ に対して，$W(y_1, y_2)(x) = 0$ となる．特に，y_1, y_2 は 1 次従属になる．よって，ある $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ が存在して，$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ が成り立つ．$c_1 = 0$ とすると，$c_2 \neq 0$ ので，$y_2 = -\dfrac{c_1}{c_2} y_1 = 0$. $c_1 \neq 0$ とすると，$y_1 = -\dfrac{c_2}{c_1} y_2$ となり，どちらも y_1, y_2 のどちらか一方は他方のスカラー倍となる．

5.3.9 y_1, y_2 を $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ の基本解とする．$W(y_1, y_2)$ は定数であるので，$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = c$ となる定数 c がある．両辺を微分して，$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = 0$ を得る．y_1, y_2 は $y_1'' = -a_1(x)y_1' - a_0(x)y_1$, $y_2'' = -a_1(x)y_2' - a_0(x)y_2$ を満たすので，$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = 0$ に代入すると，

$$-a_1(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -a_1(x)W(y_1, y_2) = 0$$

を得る．y_1, y_2 は基本解と取っているので，任意の $x \in I$ に対して，$W(y_1, y_2) \neq 0$ となり，$a_1(x) = 0$ である．

5.3.10 $W(x) = W(\sin x, x \sin x) = \sin^2 x$ は $W(0) = 0$ となる．もし $\sin x$, $x \sin x$ を解に持つ 0 を含む区間上の斉次な 2 階線形微分方程式が存在するとすると，$W(0) = 0$ は定理 5.3.2 の主張と矛盾する．よって，そのような線形微分方程式は存在しないことと言える．

5.4.1 (1) の場合のみ，詳しい解答を書く．他は同様に解くことができる．

(1) 特性方程式は $\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$ であるので，特性方程式の解は $\lambda = -2, 3$ である．よって定理 5.4.1 より，一般解は $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$（$C_1, C_2$ は任意定数）と与えられる．

(2) $y = C_1 x + C_0$　(3) $y = C_1 + C_2 e^{4x}$　(4) $y = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x$

(5) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$　(6) $y = C_1 \cos \sqrt{6}x + C_2 \sin \sqrt{6}x$

(7) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{2x}$　(8) $y = C_1 e^{\frac{2}{3}x} + C_2 x e^{\frac{2}{3}x}$　(9) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{4}}$

(10) $y = C_1 e^{-\frac{2}{3}x} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{3}x\right) + C_2 e^{-\frac{2}{3}x} \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{3}x\right)$

5.4.2 微分方程式の特性方程式は $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$ であるので，特性方程式の解は $\lambda = 3, 4$ である．よって，定理 5.4.1 より，一般解は $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$（$C_1, C_2$ は任意定数）と与えられる．初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = R$ より，

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 + 4C_2 = R \end{cases}$$

となるので，$C_1 = 4 - R, C_2 = -3 + R$ となり，解は $y = (4 - R)e^{3x} + (R - 3)e^{4x}$ となる．$y = e^{3x}\{(4 - R) + (R - 3)e^x\}$ であり，$x \geq 0$ において，$y \geq 0$ である必要十分条件は $f(x) = (4 - R) + (R - 3)e^x \geq 0$ である．$f(x) \geq 0$ であるには，$\lim_{x \to \infty} f(x) \geq 0$ でないといけないので，$R \geq 3$ でなければならな

い．逆に $R \geq 3$ であるとすると，$f'(x) = (R-3)e^x$ であるので，$f(x)$ は広義単調増加である．$f(0) = 1$ より，$f(x) \geq 0$ となる．よって条件は $R \geq 3$.

5.5.1

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ c & b & \lambda + a \end{vmatrix}$$

をサラスの公式等で計算すればよい．

5.5.2

(1)

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ -cx - by - az \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすると，$y = \beta x$, $z = \beta y$, $-cx - by - az = \beta z$ となり，この式を満たす解は $(x, y, z) = (t, \beta t, \beta^2 t)$ （t はパラメータ）となる．よって，固有値 β の 1 次独立な固有ベクトルは 1 つしか取れない．

(2)　(1) と全く同様である．

5.5.3 (2) のみ詳細を示す．他は同様である．

(2) 特性方程式が $(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)^2 = 0$ であるとき，$a = -\alpha - 2\beta$，$b = \beta(\beta + 2\alpha)$，$c = -\alpha\beta^2$ であることに注意して，$y = xe^{\beta x}$ が解であることを代入して確かめることができる．$e^{\alpha x}, e^{\beta x}, xe^{\beta x}$ が 1 次独立であることを示すには，$\left\{e^{(\alpha-\beta)x} = e^{cx} (c \neq 0), 1, x\right\}$ が 1 次独立であることを示せばよい．

$$W(1, x, e^{cx}) = \begin{vmatrix} 1 & x & e^{cx} \\ 0 & 1 & ce^{cx} \\ 0 & 0 & c^2 e^{cx} \end{vmatrix} = c^2 e^{cx} \neq 0$$

よって，これらは 1 次独立である．

5.5.4 (1) のみ詳細を示す．他は同様である．

(1) 特性方程式は $\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$ であるので，解は $\lambda = \pm 2, -1$（すべて単解）．よって，定理 5.5.1（１）より，$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$（$C_1, C_2, C_3$ は任意定数）となる．

(2) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x}$　(3) $y = C_0 e^{-3x} + C_1 x e^{-3x} + C_2 x^2 e^{-3x}$

(4) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$

(5) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$

(6) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2} x\right) + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2} x\right)$

第 6 章

6.1.1 (1) 同伴方程式は $y'' - 2y' - 3y = 0$ である．同伴方程式の特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ となり，特性方程式の解は $\lambda = 3, -1$

となる．よって，同伴方程式の一般解は $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$ となる．一方 $f(x) = x^2$ であるので，$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ とおいて，2 次関数から特殊解を探す．代入すると，

$$-3a_2x^2 + (-3a_1 - 4a_2)x + 2a_2 - 2a_1 - 3a_0 = x^2$$

となり，これは x についての恒等式であるので，$a_2 = -\dfrac{1}{3}, a_1 = \dfrac{4}{9}$，$a_0 = -\dfrac{14}{27}$ となる．よって，$y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{4}{9}x - \dfrac{14}{27}$ がこの微分方程式の特殊解となる．よって，定理 6.1.1 より，微分方程式の一般解は $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{4}{9}x - \dfrac{14}{27}$ となる．

(2) (1) と同様に示せる．一般解は $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \dfrac{x}{2}e^x$

6.1.2 (1) 同伴方程式の特性方程式は $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$ となるので，特性方程式の解は $1, 2$（2 重解）となる．よって同伴方程式の一般解は定理 5.5.1(2) より，$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3xe^{-2x}$ となる．一方，$f(x) = x^2$ であるので，$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ とおいて，2 次関数から特殊解を探す．代入すると，

$$-4a_2x^2 - 4a_1x - 4a_0 + 6a_2 = x^2$$

となり，これは x についての恒等式であるので，$a_2 = -\dfrac{1}{4}, a_1 = 0$，$a_0 = -\dfrac{3}{8}$ となる．よって，$y = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{8}$ がこの微分方程式の特殊解となる．よって，定理 6.1.1 より，微分方程式の一般解は $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3xe^{-2x} - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{8}$.

(2)（1）と同様に示せる．一般解は $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3xe^{-2x} - \dfrac{x^2}{6}e^{-2x}$.

6.1.3 (1) $y = x^m$ を同伴方程式に代入すると，

$$x^m(m^2 + m - 2) = x^m(m - 1)(m + 2) = 0$$

となる．よって，$m = 1, -2$ であれば解となる．よって求めたい解は $y = x, x^{-2}$ である．

(2) $\{x, x^{-2}\}$ の 1 次独立性は $\{x^3, 1\}$ の 1 次独立性と同じであるが，$\{x^3, 1\}$ が 1 次独立であることは明らか．よって，同伴方程式の一般解は $y = \dfrac{C_1}{x^2} + C_2x$ となる．$f(x) = x^3$ であるので，$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ とおいて，3 次関数から特殊解を探す．微分方程式に代入すると，

$$10a_3x^3 + 4a_2x^2 - 2a_0 = x^3$$

となる．これは x についての恒等式であるので，$a_3 = \dfrac{1}{10}, a_2 = a_0 = 0$ で a_1 は何でもよいとなる．特に $y = \dfrac{1}{10}x^3$ が特殊解となる．以上と定理 6.1.1 より，微分方程式の一般解は $y = \dfrac{C_1}{x^2} + C_2x + \dfrac{x^3}{10}$ となる．

6.2.1 (1) のみ詳細を示す．他は同様である．

(1) 同伴方程式の特性方程式は $\lambda^2-5\lambda-6=(\lambda-6)(\lambda+1)=0$ となるので，同伴方程式の一般解は $y=C_1e^{6x}+C_2e^{-x}$ となる．$y_1=e^{6x}$，$y_2=e^{-x}$ とおく．y_1,y_2 のロンスキアンは

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{6x} & e^{-x} \\ 6e^{6x} & -e^{-x} \end{vmatrix}=-7e^{5x}$$

p104 の定数変化法を適用して，

$$C_1(x)=\frac{1}{7}\int xe^{-6x}dx=-\frac{1}{42}xe^{-6x}+\frac{1}{42}\int e^{-6x}dx=-\frac{1}{42}xe^{-6x}-\frac{1}{252}e^{-6x}$$

$$C_2(x)=-\frac{1}{7}\int xe^{x}dx=-\frac{1}{7}xe^{x}+\frac{1}{7}\int e^{x}dx=-\frac{1}{7}xe^{x}+\frac{1}{7}e^{x}$$

よって，微分方程式の一般解は

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2=C_1e^{6x}+C_2e^{-x}-\frac{x}{6}+\frac{5}{36}$$

となる．

(2) $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\dfrac{1}{6}x^3e^{3x}$　(3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{e^x}{2}$　(4) $y=C_1e^x+C_2e^{\frac{x}{3}}-\dfrac{1}{4}x(x+5)e^{\frac{x}{3}}$

6.2.2 (1) x^m を同伴方程式に代入すると，

$$(2m^2-m-1)x^m=(2m+1)(m-1)x^m=0$$

となるので，$y=x^{-\frac{1}{2}},x$ が同伴方程式の解となる．また，$y_1=x^{-\frac{1}{2}}$，$y_2=x$ とおくとき，ロンスキアン $W(y_1,y_2)$ は

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x^{-\frac{1}{2}} & x \\ -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\neq 0$$

よって，y_1,y_2 は 1 次独立であり，これらは 2 階線形微分方程式である同伴方程式の基本解となる．

(2) p106 の 2 番目の注意をもって，p104 の定数変化法を適用して，

$$C_1(x)=-\frac{1}{3}\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=-\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\sqrt{x}$$

$$C_2(x)=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}\log x-\frac{1}{3x}$$

よって，微分方程式の一般解は，

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2=C_1x^{-\frac{1}{2}}+C_2x-1+\frac{x}{3}\log x$$

となる．

6.2.3 (1) $y = x^m$ を同伴方程式に代入すると，

$$(m^2 + 4m + 4)x^m = (m+2)^2 x^m = 0$$

となるので，$y_1 = x^{-2}$ は解である．次に $y = x^m \log x$ を同伴方程式に代入すると，

$$(m+2)^2 x^m \log x + 2(m+2)x^m = 0$$

よって，$m = -2$ はこの方程式を満たすので，$y_2 = x^{-2} \log x$ は同伴方程式の解である．

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{-2} & x^{-2}\log x \\ -2x^{-3} & x^{-3}\left(-2\log x + 1\right) \end{vmatrix} = x^{-5} \neq 0$$

よって，y_1, y_2 は 1 次独立であり，これらは 2 階線形微分方程式である同伴方程式の基本解となる．

(2) p106 の 2 番目の注意をもって，p104 の定数変化法を適用して，

$$C_1(x) = -\int \frac{\log x}{x} dx = -\frac{1}{2}\left(\log x\right)^2$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \log x$$

よって，微分方程式の一般解は

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \frac{C_1}{x^2} + C_2\frac{\log x}{x^2} + \frac{\left(\log x\right)^2}{2x^2}$$

6.3.1 y_{*1}, y_{*2} がそれぞれの微分方程式の特殊解であることから，

$$y''_{*1} + ay'_{*1} + by_{*1} = f_1(x) \tag{2}$$

$$y''_{*2} + ay'_{*2} + by_{*2} = f_2(x) \tag{3}$$

(2), (3) を足し合わせて，

$$\left(y_{*1} + y_{*2}\right)'' + a\left(y_{*1} + y_{*2}\right)' + b\left(y_{*1} + y_{*2}\right) = 0$$

となり，題意が言えた．

6.3.2 (1) のみ詳細を示す．他は同様である．また，特殊解だけでなく，一般解をここでは記しておく．

(1) 表 6.1 より，特殊解を $y = ax^2 + bx + c$ の形で探す．微分方程式に代入して，

$$2ax^2 + (6a + 2b)x + (2a + 3b + 2c) = x^2$$

を得る．x についてのこの恒等式を解いて，$a = \dfrac{1}{2}, b = -\dfrac{3}{2}, c = \dfrac{7}{4}$ となる．よって，$y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}$ は特殊解である．一般解も記すと，$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}$ である．

(2) $y = C_1 e^{\frac{3}{2}x} \cos\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}x\right) + C_2 e^{\frac{3}{2}x} \sin\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}x\right) + \dfrac{e^{3x}}{5}$

(3) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}x\right) + C_2 e^{\frac{x}{2}x} \sin\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}x\right) - \dfrac{2}{5}\sin 2x - \dfrac{1}{5}\cos 2x$

(4) $y = C_1 e^x \cos\sqrt{3}x + C_2 e^x \sin\sqrt{3}x + \dfrac{3}{73}e^{3x}\sin 2x - \dfrac{8}{73}e^{3x}\cos 2x$

(5) $y = C_1 e^x + C_2 - \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 4x$ (6) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + xe^{3x}$

(7) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \dfrac{x}{4}\cos 2x$

(8) $y = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x + \dfrac{1}{3}e^{2x}\cos x$

(9) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \dfrac{x}{5} - \dfrac{4}{25} + \dfrac{x}{6}e^x$

(10) $y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x + \dfrac{e^{2x}}{2}\sin x - \dfrac{e^{2x}}{2}\cos x$

6.3.3 (1) $y = k(x)e^{\alpha x}$ を微分方程式に代入すると，

$\left\{k''(x) + (2\alpha + a)k'(x) + (\alpha^2 + a\alpha + b)k(x)\right\} e^{\alpha x} = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)e^{\alpha x}$

となる．よって，

$$k''(x) + (2\alpha + a)k'(x) + (\alpha^2 + a\alpha + b)k(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m$$

であれば，$y = k(x)e^{\alpha x}$ は解である．

(2) (1) より，特殊解を探すには

$$k'' + 3k = x^2 - x - 2$$

の特殊解を探せばよい．表 6.1 より，$k = x(ax^2 + bx + c)$ の形の解を探す．上記の微分方程式に代入して，

$$9ax^2 + (6a + 6b)x + (2b + 3c) = x^2 - x - 2$$

よって，$a = \dfrac{1}{9}, b = -\dfrac{5}{18}, c = -\dfrac{13}{27}$ であれば解となる．以上より，$\dfrac{x}{54}(6x^2 - 15x - 26)e^{2x}$ が特殊解となる．

6.3.4 (1) のみ詳細を示す．他は同様である．

(1) まず同伴方程式の一般解を求める．特性方程式は

$$\lambda^3 - 8\lambda + 22\lambda - 20 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = 0$$

となるので，特性方程式の解は $\lambda = 2, 3 \pm i$ となる．よって，定理 5.5.1（4）より，同伴方程式の一般解は $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}\cos x + C_3 e^{3x}\sin x$ となる．つぎに与えられた微分方程式の特殊解を求める．表 6.1 より，$y = Axe^{2x}$ の形の解を探す． 微分方程式に代入すると，$2Ae^{2x} = e^{2x}$ となり，$A = \dfrac{1}{2}$ であれば解となる．よって，$y = \frac{1}{2}xe^{2x}$ は特殊解となる．以上と，定理 6.1.1 より，一般解は $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}\cos x + C_3 e^{3x}\sin x + \dfrac{x}{2}e^{2x}$ となる．

(2) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 xe^{-x} + \dfrac{x^3}{6}e^{-x}$