演 習 問 題 解 答 例

4.1.1 (1) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 4y_1 + 5y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6x \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \sin x \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

4.2.1 (1) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

より，$\lambda = 3, 2$ である．$\lambda = 3$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ がとれる．同様にして，$\lambda = 2$ のときは対応する固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表される．

(2) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

より，$\lambda = 1 \pm 2i$ である．$\lambda = 1 + 2i$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 1 + 2i$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ がとれる．$\lambda = 1 - 2i$ に対応する固有ベクトルとしては，この共役をとって $\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ がとれる．よって

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = i\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とおくと，求める一般解は R と θ を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = Re^x \cos(2x + \theta)\boldsymbol{u}_1 + Re^x \sin(2x + \theta)\boldsymbol{u}_2$$

と表される．

(3) A の固有値 λ は，固有方程式 $|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2 = 0$ より，$\lambda = 2$（重解）である．$\lambda = 2$ のとき，連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は s と t を任意定数として $\boldsymbol{v} = s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

と表される．

(4) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2 = 0$$

より，$\lambda = 2$（重解）である．$\lambda = 2$ のとき，連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ がとれる．また連立 1 次方程式 $-(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ と表されるので，$A\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}_2$ として例えば $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\left\{x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

と表される．

(5) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

より，$\lambda = 4, -1$ である．$\lambda = 4$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 4$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ がとれる．同様にして，$\lambda = -1$ のときは対応する固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{4x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-x}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

と表される．

(6) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$$

より，$\lambda = 2 \pm \sqrt{3}i$ である．$\lambda = 2 + \sqrt{3}i$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-i\end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 2 + \sqrt{3}i$ に対応する固有ベクトルとしては例

えば $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-i\end{pmatrix}$ がとれる．$\lambda=2-\sqrt{3}i$ に対応する固有ベクトルとしては，この共役をとって $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\i\end{pmatrix}$ がとれる．よって

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2=i\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-i\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

とおくと，求める一般解は R と θ を任意定数として

$$\boldsymbol{y}=Re^{2x}\cos(\sqrt{3}x+\theta)\boldsymbol{u}_1+Re^{2x}\sin(\sqrt{3}x+\theta)\boldsymbol{u}_2$$

と表される．

4.3.1 (1) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I-A|=\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

より，$\lambda=2,\,1,\,-1$ である．$\lambda=2$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I-A)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v}=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda=2$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれる．同様にして，$\lambda=1$ のときは対応する固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ がとれ，$\lambda=-1$ のときは対応する固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1，C_2，C_3 を任意定数として

$$\boldsymbol{y}=C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^{x}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+C_3e^{-x}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

と表される．

(2) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I-A|=\lambda^3-7\lambda^2+17\lambda-15=(\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda+5)=0$$

より，$\lambda=3,\,2\pm i$ である．$\lambda=3$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I-A)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda=3$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ がとれる．同様に，$\lambda=2+i$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\end{pmatrix}$ がとれる．$\lambda=2-i$ に

対応する固有ベクトルとしては，この共役をとって $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる．よって

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，求める一般解は C，R，θ を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = Ce^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + Re^{2x}\cos(x+\theta)\boldsymbol{u}_1 + Re^{2x}\sin(x+\theta)\boldsymbol{u}_2$$

と表される．

(3) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda-5)(\lambda-1)^2 = 0$$

より，$\lambda = 5$ と $\lambda = 1$（重解）である．$\lambda = 5$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 5$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．$\lambda = 1$ のときは，連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は s と t を任意定数として $\boldsymbol{v} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1，C_2，C_3 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1e^{5x}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{x}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{x}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表される．

(4) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = (\lambda-3)^3 = 0$$

より，$\lambda = 3$（3 重解）である．$\lambda = 3$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は s, t, u を任意定数として $\boldsymbol{v} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 3$ に対応する固有ベクトル

としては例えば $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1，C_2，C_3 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1e^{3x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_2e^{3x}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + C_3e^{3x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

と表される．

(5) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2 = 0$$

より，$\lambda = 1$ と $\lambda = 3$（重解）である．$\lambda = 1$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれる．同様に，$\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ がとれる．また連立 1 次方程式 $-(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$A\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}_2$ として例えば $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1，C_2，C_3 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1e^{x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2e^{3x}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + C_3e^{3x}\left\{x\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

と表される．

(6) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

より，$\lambda = 2$（3 重解）である．$\lambda = 2$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は s と t を任意定数として $\boldsymbol{v} = s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ がとれる（後者は次の連立 1 次方程式が解けるように $s = t = 1$ とした）．また連立 1 次方程式 $-(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$ の解 $\boldsymbol{v}$ は s と t を任意定数として

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$A\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2 + \lambda \boldsymbol{v}_3$ を満たす $\boldsymbol{v}_3$ として例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1，C_2，C_3 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2x} \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

と表される．

(7) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

より，$\lambda = 2$（3 重解）である．$\lambda = 2$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．また連立 1 次方程式 $-(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$A\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \lambda \boldsymbol{v}_2$ を満たす $\boldsymbol{v}_2$ として例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．さらに連立 1 次方程式 $-(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$A\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2 + \lambda \boldsymbol{v}_3$ を満たす $\boldsymbol{v}_3$ として例えば $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1，C_2，C_3 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + C_3 e^{2x} \left\{ \frac{1}{2} x^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

と表される．

(8) A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

より，$\lambda = 0, 2, 3$ である．$\lambda = 0$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 0$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ

る．同様にして，$\lambda=2$ のときは対応する固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，$\lambda=3$ のときは対応する固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．よって求める一般解は C_1，C_2，C_3 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される．

4.4.1 (1) $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \sin x \\ y_2 \end{pmatrix}$$

であるので，まず 2 行目の式 $y_2' = y_2$ から，C_2 を任意定数として $y_2 = C_2 e^x$ と表されることがわかる．これから 1 行目の式は $y_1' = y_1 + C_2 e^x \sin x$ と表される．この一般解 y_1 は，特殊解 $y = -C_2 e^x \cos x$ と斉次方程式 $y' = y$ の一般解 $y = C_1 e^x$（C_1 は任意定数）の和によって $y_1 = C_1 e^x - C_2 e^x \cos x$ とかける．よって求める一般解は

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} -\cos x \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される．

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．座標変換 $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ を行うと，$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ は $P\boldsymbol{z}' = AP\boldsymbol{z}$ と表せるので，両辺に左から P^{-1} をかけることで

$$\boldsymbol{z}' = P^{-1}AP\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -2x \end{pmatrix} \boldsymbol{z}$$

と変形できる．$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とすると，この式の 1 行目は $z_1' = 2xz_1$，2 行目は $z_2' = -2xz_2$ となり，それぞれ独立に解くと，C_1 と C_2 を任意定数として $z_1 = C_1 e^{x^2}$，$z_2 = C_2 e^{-x^2}$ と表される．よって求める一般解は

$$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z} = C_1 e^{x^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表される．

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．座標変換 $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ を行うと，$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ は $P\boldsymbol{z}' = AP\boldsymbol{z}$ と表せるので，両辺に左から P^{-1} をかけることで

$$\boldsymbol{z}' = P^{-1}AP\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x-1 \end{pmatrix} \boldsymbol{z}$$

と変形できる．$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とすると，この式の 1 行目は $z_1' = z_1$，2 行目は $z_2' = (2x-1)z_2$ となり，それぞれ独立に解くと，C_1 と C_2 を任意定数として $z_1 = C_1 e^x$，$z_2 = C_2 e^{x^2-x}$ と表される．よって求める一般解は

$$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{x(x-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表される．

4.5.1 (1) まず斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の一般解を求める．A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

より，$\lambda = 1, -2$ である．$\lambda = 1$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．同様にして，$\lambda = -2$ のときは対応する固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．よって斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の一般解は C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^x & e^{-2x} \\ e^x & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

と表せる．次に，基本行列 $W(x)$ と関数ベクトル $\boldsymbol{c}(x)$ を

$$W(x) = \begin{pmatrix} 4e^x & e^{-2x} \\ e^x & e^{-2x} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$$

とおき，非斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$ の特殊解 $\boldsymbol{y}_*$ を $\boldsymbol{y}_* = W(x)\boldsymbol{c}(x)$ の形で探す．この $\boldsymbol{y}_*$ を方程式に代入して整理すると，$W(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{b}$ が得られるので，

$$\boldsymbol{c}'(x) = W^{-1}(x)\boldsymbol{b} = \frac{1}{3e^{-x}} \begin{pmatrix} e^{-2x} & -e^{-2x} \\ -e^x & 4e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4e^{-x} \\ 22e^{2x} \end{pmatrix}$$

となる．したがって C，$\tilde{C}$ を積分定数として

$$\boldsymbol{c}(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \int -4e^{-x} dx \\ \int 22e^{2x} dx \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4e^{-x} + C \\ 11e^{2x} + \tilde{C} \end{pmatrix}$$

が得られる．特殊解は 1 つ求めればよいので，$C = \tilde{C} = 0$ とすると，$\boldsymbol{y}_*$ は

$$\boldsymbol{y}_* = W(x)\boldsymbol{c}(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4e^x & e^{-2x} \\ e^x & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{-x} \\ 11e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と求まる．したがって求める一般解は，C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と表される．

(2) まず斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の一般解を求める．A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

より，$\lambda = 3, 1$ である．$\lambda = 3$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ がとれる．同様にして，$\lambda = 1$ のときは対応する固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ がとれる．よって斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の一般解は C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{3x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{x}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{3x} & -e^{x}\\ e^{3x} & e^{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

と表せる．次に，基本行列 $W(x)$ と関数ベクトル $\boldsymbol{c}(x)$ を

$$W(x) = \begin{pmatrix}e^{3x} & -e^{x}\\ e^{3x} & e^{x}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}(x) = \begin{pmatrix}c_1(x)\\c_2(x)\end{pmatrix}$$

とおき，非斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$ の特殊解 $\boldsymbol{y}_*$ を $\boldsymbol{y}_* = W(x)\boldsymbol{c}(x)$ の形で探す．この $\boldsymbol{y}_*$ を方程式に代入して整理すると，$W(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{b}$ が得られるので，

$$\boldsymbol{c}'(x) = W^{-1}(x)\boldsymbol{b} = \frac{1}{2e^{4x}}\begin{pmatrix}e^{x} & e^{x}\\ -e^{3x} & e^{3x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x^2 - 5x\\ x^2 - 6x + 3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(3x^2 - 11x + 3)e^{-3x}\\ -(x^2 + x - 3)e^{-x}\end{pmatrix}$$

となる．したがって C，$\tilde{C}$ を積分定数として

$$\boldsymbol{c}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\int(3x^2 - 11x + 3)e^{-3x}dx\\ -\int(x^2 + x - 3)e^{-x}dx\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x(3 - x)e^{-3x} + C\\ x(3 + x)e^{-x} + \tilde{C}\end{pmatrix}$$

が得られる．特殊解は 1 つ求めればよいので，$C = \tilde{C} = 0$ とすると，$\boldsymbol{y}_*$ は

$$\boldsymbol{y}_* = W(x)\boldsymbol{c}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{3x} & -e^{x}\\ e^{3x} & e^{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(3 - x)e^{-3x}\\ x(3 + x)e^{-x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x^2\\ 3x\end{pmatrix}$$

と求まる．したがって求める一般解は，C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{3x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{x}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-x^2\\ 3x\end{pmatrix}$$

と表される．

(3) まず斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の一般解を求める．A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

より，$\lambda = -2, 1$ である．$\lambda = -2$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = -2$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ がとれる．同様にして，$\lambda = 1$ のときは対応する固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ がとれる．よって斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の一般解は C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{-2x}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{x}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3e^{-2x} & 3e^{x}\\ e^{-2x} & 2e^{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

と表せる．次に，基本行列 $W(x)$ と関数ベクトル $\boldsymbol{c}(x)$ を

$$W(x) = \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & 3e^{x} \\ e^{-2x} & 2e^{x} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$$

とおき，非斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$ の特殊解 $\boldsymbol{y}_*$ を $\boldsymbol{y}_* = W(x)\boldsymbol{c}(x)$ の形で探す．この $\boldsymbol{y}_*$ を方程式に代入して整理すると，$W(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{b}$ が得られるので，

$$\boldsymbol{c}'(x) = W^{-1}(x)\boldsymbol{b} = \frac{1}{3e^{-x}} \begin{pmatrix} 2e^{x} & -3e^{x} \\ -e^{-2x} & 3e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{-2x} \\ 3e^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2e^{-3x} \end{pmatrix}$$

となる．したがって C，$\tilde{C}$ を積分定数として

$$\boldsymbol{c}(x) = \begin{pmatrix} \int(-1)dx \\ \int 2e^{-3x}dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + C \\ -\frac{2}{3}e^{-3x} + \tilde{C} \end{pmatrix}$$

が得られる．特殊解は 1 つ求めればよいので，$C = \tilde{C} = 0$ とすると，$\boldsymbol{y}_*$ は

$$\boldsymbol{y}_* = W(x)\boldsymbol{c}(x) = \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & 3e^{x} \\ e^{-2x} & 2e^{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ -\frac{2}{3}e^{-3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} - 3xe^{-2x} \\ -\frac{4}{3}e^{-2x} - xe^{-2x} \end{pmatrix}$$

と求まる．したがって求める一般解は，C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = C_1e^{-2x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{x}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-2x}\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + xe^{-2x}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表される．

(4) まず斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の一般解を求める．A の固有値 λ は，固有方程式

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + 1 = 0$$

より，$\lambda = \pm i$ である．$\lambda = i$ のときは連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は t を任意定数として $\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，$\lambda = i$ に対応する固有ベクトルとしては例えば $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．$\lambda = -i$ に対応する固有ベクトルとしては，この共役をとって $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．よって

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = i\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の一般解は R と θ を任意定数として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= R\cos(x+\theta)\boldsymbol{u}_1 + Re^{x}\sin(x+\theta)\boldsymbol{u}_2 \\ &= R\cos\theta(\boldsymbol{u}_1\cos x + \boldsymbol{u}_2\sin x) + R\sin\theta(\boldsymbol{u}_2\cos x - \boldsymbol{u}_1\sin x) \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos x - 2\sin x & -2\cos x - 2\sin x \\ 2\cos x & -2\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる．次に，基本行列 $W(x)$ と関数ベクトル $\boldsymbol{c}(x)$ を

$$W(x) = \begin{pmatrix} 2\cos x - 2\sin x & -2\cos x - 2\sin x \\ 2\cos x & -2\sin x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$$

とおき，非斉次微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$ の特殊解 $\boldsymbol{y}_*$ を $\boldsymbol{y}_* = W(x)\boldsymbol{c}(x)$ の形で探す．この $\boldsymbol{y}_*$ を方程式に代入して整理すると，$W(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{b}$ が得られるので，

$$\boldsymbol{c}'(x) = W^{-1}(x)\boldsymbol{b} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2\sin x & 2\cos x + 2\sin x \\ -2\cos x & 2\cos x - 2\sin x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

となる．したがって C，$\tilde{C}$ を積分定数として

$$\boldsymbol{c}(x) = \begin{pmatrix} \int \cos x dx \\ -\int \sin x dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x + C \\ \cos x + \tilde{C} \end{pmatrix}$$

が得られる．特殊解は 1 つ求めればよいので，$C = \tilde{C} = 0$ とすると，$\boldsymbol{y}_*$ は

$$\boldsymbol{y}_* = W(x)\boldsymbol{c}(x) = \begin{pmatrix} 2\cos x - 2\sin x & -2\cos x - 2\sin x \\ 2\cos x & -2\sin x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と求まる．したがって求める一般解は，C_1 と C_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = R\cos(x+\theta)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + R\sin(x+\theta)\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表される．