第3章

3.2.1

C は任意定数とする．

(1) $P(x)=-\tan x$ である．このとき，$\displaystyle\int P(x)dx=\log(\cos x)$（例 3.2.1 の後の注意により，この不定積分において，積分定数や対数の真数の絶対値を考える必要はない.）よって，求める一般解は $y=Ce^{-\int P(x)dx}=Ce^{-\log(\cos x)}=\dfrac{C}{\cos x}$

(2) $P(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ であるので，$\displaystyle\int P(x)dx=\tan^{-1}x$　よって，求める一般解は $y=Ce^{-\tan^{-1}x}$

(3) $P(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ であるので，$\displaystyle\int P(x)dx=\log(x^2+1)$　よって，求める一般解は $y=Ce^{-\log(x^2+1)}=\dfrac{C}{x^2+1}$

3.3.1

対応する斉次微分方程式 $y'-(\tan x)y=0$ の一般解は $y=Ce^{\int\tan x\ dx}=Ce^{-\log(\cos x)}=\dfrac{C}{\cos x}$　(C は任意定数) である．ここで，C を x についての関数とみなして，$y=\dfrac{C(x)}{\cos x}$ が非斉次微分方程式 $y'-(\tan x)y=\sin x$ の解となるように $C(x)$ を求める．このとき，与えられた微分方程式より，$C(x)$ は $C'(x)=\sin x\cos x$ を満たさなければならないことがわかる．よって，$C(x)=\displaystyle\int\sin x\cos x\ dx=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$ である．したがって，求める一般解は $y=\left(\dfrac{1}{2}sin^2x+C\right)\times\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{C}{\cos x}+\dfrac{1}{2}\sin x\tan x$　(C は任意定数) である．

3.3.2

C は任意定数とする．

(1) $P(x)=3, Q(x)=\sin x$ なので，1 階線形微分方程式の解の公式により，解は $y=e^{-\int 3\ dx}\left(\displaystyle\int\sin xe^{\int 3\ dx}\ dx+C\right)=e^{-3x}\left(\displaystyle\int\sin xe^{3x}\ dx+C\right)$ である．ここで，$I=\displaystyle\int\sin xe^{3x}\ dx$ とおくと，部分積分法による計算により，$I=-\cos xe^{3x}+3\displaystyle\int\cos xe^{3x}\ dx=-\cos xe^{3x}+3\sin xe^{3x}-9I$ であるので，$I=\dfrac{1}{10}(3\sin x-\cos x)e^{3x}$ である．よって，求める一般解は，$y=Ce^{-3x}+\dfrac{1}{10}(3\sin x-\cos x)$ である．

(2) $P(x)=2x, Q(x)=x$ なので，1 階線形微分方程式の解の公式により，解は $y=e^{-\int 2x\ dx}\left(\displaystyle\int xe^{\int 2x\ dx}\ dx+C\right)=e^{-x^2}\left(\displaystyle\int xe^{x^2}\ dx+C\right)=e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C\right)=Ce^{x^2}+\dfrac{1}{2}$ である．(この微分方程式は $y'=x(2y-1)$ と変形することができるので，変数分離形として解くことができる.)

(3) $P(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}, Q(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ なので，1 階線形微分方程式の解の公式により，解は $y=e^{\int\frac{1}{x^2+1}\ dx}\left(\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}e^{-\int\frac{1}{x^2+1}\ dx}\ dx+C\right)=e^{\tan^{-1}x}\left(\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}e^{-\tan^{-1}x}\ dx+C\right)=e^{\tan^{-1}x}\left\{\displaystyle\int\left(-e^{-\tan^{-1}x}\right)'\ dx+C\right\}=e^{\tan^{-1}x}\left(-e^{-\tan^{-1}x}+C\right)=Ce^{\tan^{-1}x}-1$ である．

(この微分方程式は $y' = \dfrac{y+1}{x^2+1}$ と変形することができるので，変数分離形として解くことができる.)

(4) $P(x) = -\dfrac{1}{x}$, $Q(x) = \log x$ なので，1 階線形微分方程式の解の公式により，解は $y = e^{\int \frac{1}{x}\,dx}\left(\int \log x e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\,dx + C\right) = e^{\log x}\left(\int \log x e^{-\log x}\,dx + C\right) = x\left(\int \dfrac{\log x}{x}\,dx + C\right)$ である．ここで，$\left((\log x)^2\right)' = \dfrac{2\log x}{x}$ であることに注意すると，$y = x\left(\dfrac{1}{2}(\log x)^2 + C\right) = Cx + \dfrac{1}{2}x(\log x)^2$ である.

(5) $P(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $Q(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ なので，1 階線形微分方程式の解の公式により，解は $y = e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx}\left(\int \dfrac{e^x}{x^2+1}e^{\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx}\,dx + C\right) = e^{-\log(x^2+1)}\left(\int \dfrac{e^x}{x^2+1}e^{\log(x^2+1)}\,dx + C\right) = \dfrac{1}{x^2+1}\left(\int e^x\,dx + C\right) = \dfrac{C}{x^2+1} + \dfrac{e^x}{x^2+1}$ である.

3.3.3

C は任意定数とする.

(1) $P(x) = \cos x$, $Q(x) = \sin x \cos x$ なので，1 階線形微分方程式の解の公式により，一般解は $y = e^{-\int \cos x\,dx}\left(\int \sin x \cos x e^{\int \cos x\,dx}\,dx + C\right) = e^{-\sin x}\left(\int \sin x \cos x e^{\sin x}\,dx + C\right) = e^{-\sin x}\left\{\int \sin x \left(e^{\sin x}\right)'\,dx + C\right\} = e^{-\sin x}\left\{e^{\sin x}(\sin x - 1) + C\right\} = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$ である．初期条件により，$2 = C - 1$ であるので，$C = 3$．よって，求める解は $y = 3e^{-\sin x} + \sin x - 1$ である.

(2) $P(x) = -\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, $Q(x) = \dfrac{e^x}{x}$ なので，1 階線形微分方程式の解の公式により，一般解は $y = e^{\int (1+\frac{1}{x})\,dx}\left(\int \dfrac{e^x}{x}e^{-\int (1+\frac{1}{x})\,dx}\,dx + C\right) = e^{x+\log x}\left(\int \dfrac{e^x}{x}e^{-x-\log x}\,dx + C\right) = xe^x\left(\int \dfrac{1}{x^2}\,dx + C\right) = xe^x\left(-\dfrac{1}{x} + C\right) = Cxe^x - e^x$ である．初期条件により，$0 = Ce - e$ であるので，$C = 1$．よって，求める解は $y = xe^x - e^x$ である.

3.4.1

C は任意定数とする.

(1) 両辺を y^2 で割ると，$y^{-2}y' - 2y^{-1} = e^x$．$u = y^{-1}$ とおくと，u についての 1 階線形微分方程式 $u' + 2u = -e^x$ を得る．これを解くと，$u = e^{-\int 2\,dx}\left(\int (-e^x)e^{\int 2\,dx}\,dx + C\right) = -\dfrac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}$ である．$u = y^{-1}$ より，$y = \dfrac{1}{Ce^{-2x} - \frac{1}{3}e^x}$（または，任意定数 C を取り換えて，$y = \dfrac{3}{Ce^{-2x} - e^x}$ の形の表現でもよい.）

(2) 両辺を y^3 で割ると，$y^{-3}y' + 2xy^{-2} = x$．$u = y^{-2}$ とおくと，u についての 1 階線形微分方程式 $u' - 4xu = -2x$ を得る．これを解くと，$u = e^{\int 4x\,dx}\left(\int (-2x)e^{\int (-4x)\,dx}\,dx + C\right) = \dfrac{1}{2} + Ce^{2x^2}$ である．$u = y^{-2}$ より，$y^2 = \dfrac{1}{Ce^{2x^2} + \frac{1}{2}}$（または，任意定数 C を取り換えて，

$y = \dfrac{2}{Ce^{2x^2}+1}$ の形の表現でもよい.）
(3) 両辺を y^2 で割ると，$y^{-2}y' + y^{-1}\sin x = \sin x$．$u = y^{-1}$ とおくと，u についての 1 階線形微分方程式 $u' - u\sin x = -\sin x$ を得る．これを解くと，
$u = e^{\int \sin x\ dx}\left(\displaystyle\int (-\sin x)e^{\int(-\sin x)\ dx}\ dx + C\right) = 1 + Ce^{-\cos x}$ である．$u = y^{-1}$ より，
$y = \dfrac{1}{Ce^{-\cos x}+1}$
(4) 両辺を $y^{\frac{1}{2}}$ で割ると，$y^{-\frac{1}{2}}y' - 2y^{\frac{1}{2}} = x^2$．$u = y^{\frac{1}{2}}$ とおくと，u についての 1 階線形微分方程式 $u' - u = \dfrac{1}{2}x^2$ を得る．これを解くと，$u = e^{\int dx}\left(\displaystyle\int \frac{1}{2}x^2 e^{\int(-1)\ dx}\ dx + C\right) = -\dfrac{1}{2}(x^2+2x+2) + Ce^x$ である．$u = y^{\frac{1}{2}}$ より，$y = \left\{Ce^x - \dfrac{1}{2}(x^2+2x+2)\right\}^2$

3.4.2
(1) 関数 y_0 は方程式 (3.4.5) の解なので，$y_0' + P(x)y_0^2 + Q(x)y_0 + R(x) = 0$ を満たす．関数 $y = u + y_0$ が方程式 (3.4.5) の解であるとすると，$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$ を満たさなければならないので，$(u+y_0)' + P(x)(u+y_0)^2 + Q(x)(u+y_0) + R(x) = 0$ である．左辺 $= (u' + P(x)u^2 + 2P(x)uy_0 + Q(x)u) + (y_0' + P(x)y_0^2 + Q(x)y_0 + R(x)) = u' + (2P(x)y_0 + Q(x))u + P(x)u^2$ である．よって，未知関数 u は方程式 $u' + (2P(x)y_0 + Q(x))u = -P(x)u^2$ を満たす．これは，$\alpha = 2$ の場合のベルヌーイの方程式である．
(2) $y_0 = ax^n$ が方程式 (3.4.4) の解であるとして，これを (3.4.4) に代入して整理すると，$x^{n+1}\left\{(n+3)a - a^2x^{n+1}\right\} = 1$ を得る．この等式は恒等的に成立しなければならないので，$n+1 = 0$ でなければならない．また，これにより，$2a - a^2 = 1$ を満たさなければならない．よって，$a = 1, n = -1$ である．
(3) 方程式 (3.4.4) は $y' - y^2 + \dfrac{3}{x}y - \dfrac{1}{x^2} = 0$ へ書き換えることができるので，リッカチの微分方程式である．(2) により，$y_0 = \dfrac{1}{x}$ を解の 1 つとして持つので，(1) の計算により，u についてのベルヌーイの方程式 $u' + \dfrac{1}{x}u = u^2$ に帰着することができる．両辺を u^2 で割って，$v = u^{-1}$ とおくと，v についての 1 階線形微分方程式 $v' - \dfrac{1}{x}v = -1$ を得る．これを解くと，$v = x(C - \log|x|)$ を得る．よって，求める一般解は，$y = y_0 + \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x(C-\log|x|)}$ （C は任意定数）である．