第 5 章

5.1

線形空間 V 内のベクトル $\mathbf{0}, \mathbf{0}'$ がどちらも，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$$\text{①} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \mathbf{0}$$
$$\text{②} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \mathbf{0}'$$

を満たすものとする．① における $\boldsymbol{x}$ として，$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}'$ を考えると，① により，

$$\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0}$$

が成立する．「和」は可換であるので，$\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}'$ である．最後の式に対して，② を適用すると，$\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$ が成立する．よって，$\mathbf{0}' = \mathbf{0}$ が成り立ち，零ベクトルは一意的に定まる．

5.2

線形空間 V 内のベクトル $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ がどちらも，$\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$$\text{①} : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$
$$\text{②} : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}' = \mathbf{0}$$

を満たすものとする．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}' &= \mathbf{0} + \boldsymbol{y}' = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}' \\ &= (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}') \\ &= \boldsymbol{y} + \mathbf{0} \\ &= \boldsymbol{y}\end{aligned}$$

であるので，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$ が成り立つ．

5.3

例 5.1.1：

性質 (V1) は定理 2.1.1(1) に従い，(V2) は定理 2.1.1(2) に従う．また，定理 2.1.1(3) により，零行列 O は性質 (V3) をみたす．行列 $A \in M(m,n;\boldsymbol{R})$ に対して，$A + (-A) = O$ が成り立つので，性質 (V4) をみたす．性質 (V5)〜(V8) は定理 2.1.1(4)〜(7) に従う．よって，$M(m,n;\boldsymbol{R})$ は実線形空間である．

例 5.1.2：

通常の多項式の和や定数倍が，性質 (V1)，(V2) および，性質 (V5)〜(V8) をみたすことは明らかである．一方，定数項 0 としての多項式 $0 = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x + 0$ は，任意の多項式 $f(x) \in \boldsymbol{R}[x]_n$ に対して

$$f(x) + 0 = f(x)$$

をみたし，性質 (V3) が成立する．また，多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\boldsymbol{R}[x]_n$ に対して，$-f(x)=(-a_n)x^n+(-a_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(-a_1)x+(-a_0)\in\boldsymbol{R}[x]_n$ は

$$f(x)+(-f(x))=0$$

をみたし，性質 (V4) が成り立つ．よって，$\boldsymbol{R}[x]_n$ は実線形空間である．

例 5.1.3：
実数値関数 $f,\,g,\,h\in F(I,\ \boldsymbol{R})$ に対して，各 $x\in I$ について $f(x),\,g(x),\,h(x)$ は実数なので，$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$ をみたす．よって，$(f+g)+h=f+(g+h)$，すなわち，性質 (V1) が成り立つ．また，常に 0 の値をとる定数値関数 $0(x)$ が性質 (V3) を満たすことは明らかである．一方，任意の関数 $f\in F(I,\ \boldsymbol{R})$ に対して，$-f\in F(I,\ \boldsymbol{R})$ を

$$(-f)(x):=-f(x)$$

で定めると，明らかに各 $x\in I$ について $f(x)+(-f)(x)=0$ をみたすので，$f+(-f)=0$ が成り立ち，性質 (V4) をみたす．同様に，性質 (V2)，(V5)〜(V8) も成り立つ．よって，$F(I,\ \boldsymbol{R})$ は実線形空間である．

5.4
1 次関係式

$$c_1\boldsymbol{a}_{i_1}+c_2\boldsymbol{a}_{i_2}+\cdots+c_k\boldsymbol{a}_{i_k}=\boldsymbol{0}$$

を考える．この 1 次関係式を書き直すと，

$$0\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_1\boldsymbol{a}_{i_1}+c_2\boldsymbol{a}_{i_2}+\cdots+c_k\boldsymbol{a}_{i_k}+\cdots0\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$$

が得られる．ただし，この 1 次関係式において，添え字が i_j $(j=1,\,2,\,\ldots,\,k)$ 以外のベクトルの係数はすべて 0 であるとする．$\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立であるので，$c_1=c_2=\cdots=c_k=0$ でなければならない．よって，$\boldsymbol{a}_{i_1},\,\boldsymbol{a}_{i_2},\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_{i_k}$ は 1 次独立である．

5.5
（必要性）$\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n$ の中の少なくとも 1 つのベクトルが残りの $n-1$ 個のベクトルの 1 次結合で書き表されるとする．簡単のために，$\boldsymbol{a}_n$ が $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_{n-1}$ の 1 次結合で書き表されるとする.（他の場合についても同様に確かめることができる.）すなわち，

$$\boldsymbol{a}_n=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1}$$

とする．このとき，1 次関係式

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1}+(-1)\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$$

を得る．この 1 次関係式において $\boldsymbol{a}_n$ の係数は $-1\neq0$ であるので，この 1 次関係式は非自明である．よって，$\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{a}_n$ は 1 次従属である．

（十分生）$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次従属であるならば，非自明な 1 次関係式

$$\mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1} + \mu_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

をもつ．これが非自明であるので，係数のうちの少なくとも 1 つは 0 ではない．簡単のために，$\mu_n \neq 0$ であるとする．（他の場合についても同様に確かめることができる．）このとき，

$$\boldsymbol{a}_n = \left(-\frac{\mu_1}{\mu_n}\right)\boldsymbol{a}_1 + \left(-\frac{\mu_2}{\mu_n}\right)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \left(-\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right)\boldsymbol{a}_{n-1}$$

が成立するので，$\boldsymbol{a}_n$ は $n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ の 1 次結合で書き表される．

5.6

(1) (i)： 1 次関係式

$$c_1(x+1) + c_2(x+1)^2 + c_3(x-1)^2 = 0$$

を考える．x について整理すると，

$$(c_2+c_3)x^2 + (c_1+2c_2-2c_3)x + (c_1+c_2+c_3) = 0$$

である．ここで，$x^2, x, 1$ が $\boldsymbol{R}[x]_2$ において 1 次独立であることに注意すると，

$$\begin{cases} c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

をみたさなければならない．この連立 1 次方程式は行列を用いると，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．係数行列 A の階数が $\mathrm{rank} A = 3$ であるので[1]，この連立 1 次方程式は自明な解のみをもつことがわかる．すなわち，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ であることがわかる．よって，多項式の組 $x+1, (x+1)^2, (x-1)^2$ は 1 次独立である．

(ii)： 1 次関係式

$$c_1(x^2+x+1) + c_2(x+1)^2 + c_3(x-1)^2 = 0$$

を考える．x について整理すると，

$$(c_1+c_2+c_3)x^2 + (c_1+2c_2-2c_3)x + (c_1+c_2+c_3) = 0$$

[1] または，A が正則行列であるから，

である．ここで，$x^2, x, 1$ が $\boldsymbol{R}[x]_2$ において 1 次独立であることに注意すると，

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

をみたさなければならない．この連立 1 次方程式は行列を用いると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．係数行列 B の階数が $\mathrm{rank}B = 2 \neq 3$ であるので，この連立 1 次方程式は自明な解以外の解も持つことがわかる．すなわち，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ であるとは限らない．よって，多項式の組 $x^2 + x + 1, (x+1)^2, (x-1)^2$ は 1 次従属である．

(2) (i)：$\{x^2, x, 1\}$ は $\boldsymbol{R}[x]_2$ の基底である．この基底に関する，$x+1, (x+1)^2, (x-1)^2$ の座標は，それぞれ，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．このとき，表現行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，$\mathrm{rank}A = 3$ であることが確かめられるので，定理 5.4.2(1) により，$x+1, (x+1)^2, (x-1)^2$ は 1 次独立である．

(ii)：$\{x^2, x, 1\}$ は $\boldsymbol{R}[x]_2$ の基底である．この基底に関する，$x^2+x+1, (x+1)^2, (x-1)^2$ の座標は，それぞれ，

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．このとき，表現行列 $B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，$\mathrm{rank}B = 2 \neq 3$ であることが確かめられるので，定理 5.4.2(1) により，$x^2+x+1, (x+1)^2, (x-1)^2$ は 1 次従属である．

5.7

(1) 与えらた 1 次結合の組を行列を用いて表現すると，

$$(\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3\ \boldsymbol{b}_4) = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4) \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．このとき，定理 5.4.2 により，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ の間の 1 次関係は行列 $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の 4 つの列ベクトルの間の 1 次関係と同じである[2]．

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

B の階段行列 C の列ベクトルを $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4$ とすると，$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_4$ は $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4$ の中から選び出すことのできる 1 次独立な最大組（の 1 つ）であり，$\boldsymbol{c}_3 = -3\boldsymbol{c}_1 + 5\boldsymbol{c}_2$ が成り立つ．よって，それらに対応する $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ の中から選び出すことのできる 1 次独立な最大組（の 1 つ）であり，$\boldsymbol{b}_3 = -3\boldsymbol{b}_1 + 5\boldsymbol{b}_2$ が成り立つ．

(2) 与えらた 1 次結合の組を行列を用いて表現すると，

$$(\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3\ \boldsymbol{b}_4) = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 7 \\ -2 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．(1) と同様に，行のみの基本変形により階段行列を求めると，

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 7 \\ -2 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

B の階段行列 C の列ベクトルを $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4$ とすると，$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_3$ は $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4$ の中から選び出すことのできる 1 次独立な最大組（の 1 つ）であり，$\boldsymbol{c}_2 = 2\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_4 = 2\boldsymbol{c}_1 - 3\boldsymbol{c}_2$ が成り立つ．よって，それらに対応する $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ の中から選び出すことのできる 1 次独立な最大組（の 1 つ）であり，$\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_4 = 2\boldsymbol{b}_1 - 3\boldsymbol{b}_2$ が成り立つ．

5.8

$\boldsymbol{R}[x]_3$ の基底 $\{x^3, x^2, x, 1\}$ に関する $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ の座標をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ とする．このとき，定理 5.4.2 (3) により，$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ の間の 1 次関係は，4 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の間の 1 次関係と同じである．

(1) 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$ について，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -9 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

[2] $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ は V の基底とは限らないが，これらで生成される部分空間 $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ を考えると，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ は W の基底である．これに対して定理 5.4.2 を適用したと考えればよい．

階段行列 B の形から判断すると，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の中から選び出すことのできる 1 次独立な最大組であり，$\boldsymbol{a}_3 = -3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2$ である．よって，$f_1(x), f_2(x)$ は $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 中から選び出すことのできる 1 次独立な最大組であり，$f_3(x) = -3f_1(x) - 2f_2(x)$, $f_4(x) = f_1(x) + 5f_2(x)$ である．

(2) 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$ について，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

階段行列 B の形から判断すると，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の中から選び出すことのできる 1 次独立な最大組であり，$\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a}_1$ である．よって，$f_1(x), f_3(x), f_4(x)$ は $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 中から選び出すことのできる 1 次独立な最大組であり，$f_2(x) = 2f_1(x)$ である．

5.9

$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ を V の最小の生成系とする．今，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ が 1 次従属であると仮定すると，問題 5.5 により，この中の少なくとも 1 つは残りの $r-1$ 個のベクトルの 1 次結合で表すことができる．例えば，$\boldsymbol{u}_r$ が $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{r-1}$ の 1 次結合で表されるとする．すなわち，

$$\boldsymbol{u}_r = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_{r-1}\boldsymbol{u}_{r-1}$$

とする．このとき，任意の 1 次結合 $\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_{r-1}\boldsymbol{u}_{r-1} + \lambda_r\boldsymbol{u}_r$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_{r-1}\boldsymbol{u}_{r-1} + \lambda_r(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_{r-1}\boldsymbol{u}_{r-1}) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_r c_1)\boldsymbol{u}_1 + (\lambda_2 + \lambda_r c_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\lambda_{r-1} + \lambda_r c_{r-1})\boldsymbol{u}_{r-1} \end{aligned}$$

となり，V の任意のベクトルは $r-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{r-1}$ の 1 次結合で表される．このことは，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{r-1}\}$ が V の生成系であることを意味する．しかしながら，このことは $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{r-1}, \boldsymbol{u}_r\}$ が V の最小の生成系であることに反する．よって，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{r-1}, \boldsymbol{u}_r\}$ は 1 次独立である．したがって，最小な生成系 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{r-1}, \boldsymbol{u}_r\}$ は V の基底である．

5.10

(1) 定数項 $0(x) = 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1$ は線形空間 $\boldsymbol{R}[x]_3$ の零ベクトルである．$0'(1) = 0 \neq 1$ であるので，$0(x) \notin W_1$ である．よって，W_1 は部分空間ではない．

(2) (i) $0'(1) + 0(-1) = 0 + 0 = 0$ より，$0(x) \in W_2$ である．

(ii) $f(x), g(x) \in W_1$ に対して，$f'(1) + f(-1) = 0$, $g'(1) + g(-1) = 0$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} (f+g)'(1) + (f+g)(-1) &= (f'(1) + g'(1)) + (f(-1) + g(-1)) \\ &= (f'(1) + f(-1)) + (g'(1) + g(-1)) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

であるので，$f(x)+g(x)\in W_2$ である．

(iii) $f(x)\in W_1$ と $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(1)+(\lambda f)(-1)&=\lambda f'(1)+\lambda f(-1)=\lambda(f'(1)+f(-1))\\&=\lambda\cdot 0=0\end{aligned}$$

であるので，$\lambda f(x)\in W_2$ である．

よって，W_2 は部分空間である．

(3) $f(x)=x+1$ について，$f'(1)+f(-1)=1\geqq 0$ であるので，$f(x)\in W_3$ である．このとき，$(-1)f(x)$ について，

$$(-f)'(1)+(-f)(-1)=-1<0$$

であるので，$(-1)f(x)\notin W_3$ である．よって，部分集合 W_3 はスカラー倍について閉じていない．したがって，W_3 は部分空間ではない．

(4) (i) $x^2 0''(x)+0'(x)-6\cdot 0(x)=0$ より，$0(x)\in W_4$ である．

(ii) $f(x),\,g(x)\in W_4$ に対して，$x^2f''(x)+f'(x)-6f(x)=0,\ x^2g''(x)+g'(x)-6g(x)=0$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}&x^2(f+g)''(x)+(f+g)'(x)-6(f+g)(x)\\&=(x^2f''(x)+f'(x)-6f(x))+(x^2g''(x)+g'(x)-6g(x)))\\&=0+0=0\end{aligned}$$

であるので，$f(x)+g(x)\in W_4$ である．

(iii) $f(x)\in W_4$ と $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}x^2(\lambda f)''(x)+(\lambda f)'(x)-6(\lambda f)(x)&=\lambda(fx^2f''(x)+f'(x)-6f(x))\\&=\lambda\cdot 0=0\end{aligned}$$

であるので，$\lambda f(x)\in W_4$ である．

よって，W_4 は部分空間である．

5.11

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\boldsymbol{R}[x]_3$ とおくと，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ であるので，

$$\begin{aligned}W&=\{f(x)\in\boldsymbol{R}[x]_3\mid f(1)=0,\ f'(-1)=0\}\\&=\left\{ax^3+bx^2+cx+d\in\boldsymbol{R}[x]_3\ \middle|\ \begin{cases}a+b+c+d=0,\\3a-2b+c=0\end{cases}\right\}\end{aligned}$$

である．

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{行基本変形}]{}\begin{pmatrix}1&0&3/5&2/5\\0&1&2/5&3/5\end{pmatrix}$$

なので,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

である．よって,

$$\begin{aligned} W &= \{\lambda(-3x^3 - 2x^2 + 5x) + \mu(-2x^3 - 3x^2 + 5) \in \boldsymbol{R}[x]_3 \mid \lambda,\, \mu \in \boldsymbol{R}\} \\ &= \langle -3x^3 - 2x^2 + 5x,\, -2x^3 - 3x^2 + 5 \rangle \end{aligned}$$

である．したがって，$\{-3x^3-2x^2+5x,\, -2x^3-3x^2+5\}$ は W の基底であり，$\dim W = 2$ である．

5.12

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2) \\ &= \frac{1}{4}\left((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) - \|\boldsymbol{b}\|^2 \right) \\ &= (\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

5.13

一般の内積空間におけるシュワルツの不等式や三角不等式の証明は，数ベクトル空間の内積についての定理 3.4.2 の証明と全く同様にして行うことができる．教科書の定理 3.4.2 のシュワルツの不等式の証明でもわかるように，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ であるとき，$(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})^2 - (\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|)^2 = 0$ が成立するための必要十分条件は

$$\|t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| = 0$$

が成立する $t \in \boldsymbol{R}$ が存在することである．すなわち，シュワルツの不等式の等号が成立するためには，$\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}$ が 1 次従属であることが必要十分である．

また，同様に，定理 3.4.2 の三角不等式の証明からわかるように，三角不等式の等号が成立するためには，$(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ であることが必要十分である．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ であるとき，$(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ であるためには,

$$\|t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| = 0$$

をみたす $t > 0$ が存在することである．したがって，三角不等式の等号が成立するための必要十分条件は $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$ $(\lambda \geqq 0)$ または $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$ $(\mu \geqq 0)$ が成立することである．

5.14
教科書 5.5 節の内積の条件 (I1) $\sim$ (I4) をみたすことを確かめればよい．$f(x),\, g(x),\, h(x) \in \boldsymbol{R}[x]_2,\, \lambda \in \boldsymbol{R}$ とする．

(I1)：$f(x)g(x) = g(x)f(x)$ であるので，明らかに $(f(x),\, g(x)) = (g(x),\, f(x))$ が成立する．
(I2)：

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x),\, h(x)) &= \int_0^1 (f(x)+g(x))h(x)\ dx = \int_0^1 (f(x)h(x)+g(x)h(x))\ dx \\ &= \int_0^1 f(x)h(x)\ dx + \int_0^1 g(x)h(x)\ dx \\ &= (f(x),\, h(x)) + (g(x),\, h(x))\end{aligned}$$

(I3)：$(\lambda f(x),\, g(x)) = \displaystyle\int_0^1 (\lambda f(x))g(x)\ dx = \lambda \int_0^1 f(x)g(x)\ dx = \lambda(f(x),\, g(x))$
(I4)：$0 \leqq x \leqq 1$ に対して，$(f(x))^2 \geqq 0$ であるので，$(f(x),\, f(x)) \geqq 0$ である．$f(x) = ax^2+bx+c$ に対して，

$$\begin{aligned}(f(x),\, f(x)) &= \int_0^1 (ax^2+bx+c)^2\ dx \\ &= \frac{1}{5}\left(a+\frac{5}{4}b+\frac{5}{3}c\right)^2 + \frac{1}{48}(b+4c)^2 + \frac{1}{9}c^2\end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}(f(x),\, f(x)) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a+\dfrac{5}{4}b+\dfrac{5}{3}c = 0, \\ b+4c = 0, \\ c = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad a=b=c=0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0\end{aligned}$$

すなわち，$(f(x),\, f(x)) = 0$ であるためには，$f(x)$ が $\boldsymbol{R}[x]_2$ の零ベクトルである定数項 0 であるときに限る．

5.15
問題の連立微分方程式は行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ の対角化問題を解くと，正則行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ により，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ と対角化できる．ここで，$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} =$

$P\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ であるので,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= P^{-1}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u \\ -2v \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．よって，$u' = 3u$, $v' = -2v$ であるので，これを解くと，$u = c_1e^{3x}$, $v = c_2e^{-2x}$ を得る（ただし，c_1, c_2 は任意定数）．

したがって，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^{3x} \\ c_2e^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{3x} + 3c_2e^{-2x} \\ 2c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} \end{pmatrix}$$

となり，求める一般解は $y_1 = c_1e^{3x} + 3c_2e^{-2x}$, $y_2 = 2c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ である．

5.16

$y_1 = y$, $y_2 = y'$ とおくと，問題の微分方程式は次の連立微分方程式として表現することができる．

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ の対角化問題を解くと，正則行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ により，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ と対角化できる．ここで，$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ であるので,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= P^{-1}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 5v \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．よって，$u' = u$, $v' = 5v$ であるので，これを解くと，$u = c_1e^{x}$, $v = c_2e^{5x}$ を得る（ただし，c_1, c_2 は任意定数）．

したがって，

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^{x} \\ c_2e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{x} + c_2e^{5x} \\ c_1e^{x} + 5c_2e^{5x} \end{pmatrix}$$

となり，求める一般解は $y = c_1e^{x} + c_2e^{5x}$ である．