第 4 章

4.1.1

与えられた各行列を A とする．

(1) 固有多項式は

$$|tE-A| = \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ 2 & t-5 \end{vmatrix} = t^2-7t+12 = (t-3)(t-4)$$

より，固有値は 3 と 4.

$V(3)$ は $(3E-A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解空間で，$x=y$ より，$V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$V(4)$ は $(4E-A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解空間で，$2x=y$ より，$V(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(2) 固有多項式は

$$|tE-A| = \begin{vmatrix} t-a+2 & -1 \\ 4 & t-a-2 \end{vmatrix} = t^2-2at+a^2 = (t-a)^2$$

より，固有値は a (重複度 2).

固有値 a について，$(aE-A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解くと，$2x=y$ より，$V(a) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(3) 固有多項式は

$$|tE-A| = \begin{vmatrix} t-5 & -6 & 3 \\ 0 & t-2 & 0 \\ -3 & -6 & t+1 \end{vmatrix} \underset{\text{第 2 行で展開}}{=} (t-2)\begin{vmatrix} t-5 & 3 \\ -3 & t+1 \end{vmatrix} = (t-2)(t^2-4t+4) = (t-2)^3$$

より，固有値は 2 (重複度 3).

固有値 2 について，$(2E-A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解くと，$z = x+2y$ より，$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+2y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \boldsymbol{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(4) 固有多項式は

$$|tE-A| = \begin{vmatrix} t+1 & -2 & 2 \\ -2 & t+1 & -2 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} \underset{①+②}{=} \begin{vmatrix} t-1 & t-1 & 0 \\ -2 & t+1 & -2 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} \underset{\boxed{2}-\boxed{1}}{=} \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ -2 & t+3 & -2 \\ -1 & 0 & t-2 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)(t-2)(t+3)$$

より，固有値は 1, 2, -3.

固有値 1 について，行基本変形 $E-A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&2&-2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

より，$V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$.

固有値 2 について，行基本変形 $2E-A=\begin{pmatrix}3&-2&2\\-2&3&-2\\-1&-1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{5}\\0&1&-\frac{2}{5}\\0&0&0\end{pmatrix}$

より，$V(2)=\left\langle\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}\right\rangle$.

固有値 -3 について，行基本変形 $-3E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\-2&-2&-2\\-1&-1&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

より，$V(-3)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$.

(5) 固有多項式は

$$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1&2&-2\\-7&t+6&-3\\-3&1&t+2\end{vmatrix}\underset{\boxed{3}+\boxed{2}}{=}\begin{vmatrix}t-1&2&0\\-7&t+6&t+3\\-3&1&t+3\end{vmatrix}\underset{②-③}{=}\begin{vmatrix}t-1&2&0\\-4&t+5&0\\-3&1&t+3\end{vmatrix}$$
$$=(t+3)(t^2+4t+3)=(t+3)^2(t+1)$$

より，固有値は -3(重複度 2), -1.

固有値 -3 について，行基本変形 $-3E-A=\begin{pmatrix}-4&2&-2\\-7&3&-3\\-3&1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

より，$V(-3)=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$.

固有値 -1 について，行基本変形 $-E-A=\begin{pmatrix}-2&2&-2\\-7&5&-3\\-3&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$

より，$V(-1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$.

(6) 固有多項式は，定理 2.5.1 から

$$|tE-A| = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 & 0 \\ -1 & t & 0 & 0 \\ -1 & -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & -1 & t \end{vmatrix} = (t^2-1)^2 = (t-1)^2(t+1)^2$$

より，固有値は 1(重複度 2), -1(重複度 2).

固有値 1 について，$E-A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

より，$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

固有値 -1 について，$-E-A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

より，$V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

4.1.2

固有方程式 $|tE-A| = \begin{vmatrix} t-1 & -a \\ -b & t-3 \end{vmatrix} = t^2-4t+3-ab = 0$ の解 $2 \pm \sqrt{1+ab}$ が 2 つの異なる正の実数であればよいので，$1+ab > 0$ かつ $2 > \sqrt{1+ab}$ である．よって，求める条件は，$-1 < ab < 3$.

4.1.3

$A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{a}_n)$ とすると，行列式の性質 (定理 2.4.3) から

$$\begin{aligned} \varphi_A(t) &= |tE-A| = |t\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{a}_1 \ \ t\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \ \ t\boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{a}_n| \\ &= t^n|\boldsymbol{e}_1 \ \ \boldsymbol{e}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{e}_n| + t^{n-1}\{|-\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{e}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{e}_n| + |\boldsymbol{e}_1 \ \ -\boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{e}_n| + \cdots \\ &\qquad + |\boldsymbol{e}_1 \ \ \boldsymbol{e}_2 \ \ \cdots \ \ -\boldsymbol{a}_n|\} + \cdots + |-\boldsymbol{a}_1 \ \ -\boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \ \ -\boldsymbol{a}_n| \\ &= t^n + t^{n-1}(-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{nn}) + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{a}_n| \end{aligned}$$

したがって，定数項は $(-1)^n|A|$ であり，t^{n-1} の係数は $-\mathrm{tr}\,A$ である．

4.1.4

(1) $\boldsymbol{x}$ を固有値 λ に対する固有ベクトルとすると，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である．このとき

$$A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(A\boldsymbol{x}) = \lambda^2\boldsymbol{x}$$

であり，同様にして，自然数 k に対し

$$A^k\boldsymbol{x} = A^{k-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{k-1}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(A^{k-1}\boldsymbol{x}) = \cdots = \lambda^{k-1}A\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x}$$

となるので，λ^k は A^k の固有値である．

(2) A の固有値を重複を込めて，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすると，$\varphi_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$ である．このとき，演習問題 4.1.3 から，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$ である．したがって，ある固有値 $\lambda_i = 0 \iff |A| = 0$ である．

(3) $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ とする．A は正則より，左から A^{-1} をかけると，$\boldsymbol{x} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{x}$ となる．$|A| \neq 0$ より，(2) から $\lambda \neq 0$ であるので，$A^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x}$ となり，λ^{-1} は A^{-1} の固有値である．

4.1.5

(1) $i = 1, \cdots, d$ に対して，$A\boldsymbol{p}_i = \lambda\boldsymbol{p}_i$ より

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{p}_1 \ \cdots\cdots \ \boldsymbol{p}_n) &= (A\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ A\boldsymbol{p}_d \ A\boldsymbol{p}_{d+1} \ \cdots \ A\boldsymbol{p}_n) = (\lambda\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \lambda\boldsymbol{p}_d \ A\boldsymbol{p}_{d+1} \ \cdots \ A\boldsymbol{p}_n) \\ &= (\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_d \ \boldsymbol{p}_{d+1} \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix} \lambda E_d & * \\ O & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の形になる．P は正則であるので，これより，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda E_d & * \\ O & * \end{pmatrix}$ の形である．

(2) まず，$V \neq \{\boldsymbol{0}\}$ より，$1 \leqq \dim V(\lambda)$ である．

次に，(1) から，ある正則行列 P により，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda E_d & * \\ O & * \end{pmatrix}$ の形になる．定理 4.1.1 の直後の注意から，$\varphi_A(t) = \varphi_{P^{-1}AP}(t)$ であり，$\varphi_{P^{-1}AP}(t) = \begin{vmatrix} (t-\lambda)E_d & * \\ O & * \end{vmatrix}$ は，定理 2.5.1 から，$|(t-\lambda)E_d| = (t-\lambda)^d$ で割り切れる．したがって，$\varphi_A(t) = 0$ は λ を重複度 d 以上の解としてもつ．すなわち，$\dim V(\lambda) = d \leqq (\lambda\text{の重複度})$ である．

4.2.1

対角化可能の判定に定理 4.2.1 を用いる．与えられた各行列を A とする．

(1) $|tE-A| = \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2$ より，固有値は 2(重複度 2) である．固有値 2 について，$2E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，$V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ である．$\dim V(2) = 1 \neq (2\text{ の重複度})$ より，A は対角化できない．

(2) $|tE-A| = \begin{vmatrix} t-3 & 1 \\ 2 & t-2 \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$ より，固有値は 1 と 4 で，異なる 2 個の固有値をもつので，系 4.2.2 から A は対角化可能である．

$V(1)$ について，$E - A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ より，$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$V(4)$ について，$4E-A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ より，$V(4)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$.

そこで，それぞれの基底を並べて，$P=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$ とすれば

$$AP=(A\boldsymbol{p}_1\ \ A\boldsymbol{p}_2)=(\boldsymbol{p}_1\ \ 4\boldsymbol{p}_2)=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$$

より，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$ と対角化される．

(3) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1&-1&3\\-2&t-1&4\\0&-1&t+2\end{vmatrix}=t(t-1)(t+1)$ より，固有値は $-1,\,0,\,1$．相異なる 3 個の固有値をもつので，A は対角化可能である．

$V(-1)$ について

$$-E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&3\\-2&-2&4\\0&-1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\ \text{より},\ V(-1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$V(0)$ について

$$0E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&3\\-1&-1&4\\0&-1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\ \text{より},\ V(0)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$V(1)$ について

$$E-A=\begin{pmatrix}0&-1&3\\-2&0&4\\0&-1&3\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\ \text{より},\ V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

これらの基底を順に並べて，$P=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3)$ とすれば

$$AP=(A\boldsymbol{p}_1\ \ A\boldsymbol{p}_2\ \ A\boldsymbol{p}_3)=(-\boldsymbol{p}_1\ \ \mathbf{0}\ \ \boldsymbol{p}_3)=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

より，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ と対角化される．

(4) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-3&8&-1\\-1&t+6&-1\\3&1&t+1\end{vmatrix}=(t-2)(t+3)^2$ より，固有値は -3(重複度 2) と 2.

$V(-3)$ について

$$-3E-A=\begin{pmatrix}-6&8&-1\\-1&3&-1\\3&1&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ より，}V(-3)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

となって，$\dim V(-3)=1\neq 2(-3$ の重複度) より，A は対角化できない．

(5) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-6&6&-2\\-2&t+1&-1\\4&-6&t\end{vmatrix}=(t-2)^2(t-1)$ より，固有値は 2(重複度 2) と 1．

$V(2)$ について

$$2E-A=\begin{pmatrix}-4&6&-2\\-2&3&-1\\4&-6&2\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ より，}$$

$$V(2)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\-2x+3y\end{pmatrix}\ \middle|\ x,y\in\boldsymbol{C}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle$$

となり，$\dim V(2)=2(2$ の重複度) となっている．

$V(1)$ について

$$E-A=\begin{pmatrix}-5&6&-2\\-2&2&-1\\4&-6&1\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ より，}V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

固有空間の基底をすべて順に並べて，$P=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\-2&3&2\end{pmatrix}$ とおくと

$$AP=(A\boldsymbol{p}_1\ \ A\boldsymbol{p}_2\ \ A\boldsymbol{p}_3)=(2\boldsymbol{p}_1\ \ 2\boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3)=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

より，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ と対角化される．

4.2.2

与えられた各行列を A とする．

(1) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-2&1\\-26t-5&\end{vmatrix}=t^2-7t+12=(t-3)(t-4)$ より，固有値は 3 と 4．

$V(3)$ について，$3E-A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-2\end{pmatrix}$ より，$V(3)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$

$V(4)$ について，$4E-A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ より，$V(4)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}\right\rangle$

したがって，各基底を並べて $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ と対角化される．ここで，$P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ であり，$P^{-1}A^nP=(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$ より

$$A^n=P\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2\cdot 3^n-4^n & 3^n-4^n\\ -2\cdot 3^n+2\cdot 4^n & -3^n+2\cdot 4^n\end{pmatrix}$$

(2) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-4 & 0 & -2\\ 0 & t-1 & 0\\ 1 & 0 & t-1\end{vmatrix}=(t-1)(t-2)(t-3)$ より，固有値は 1, 2, 3.

$V(1)$ について

$$E-A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ \text{より},\ V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$V(2)$ について

$$2E-A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ \text{より},\ V(2)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$V(3)$ について

$$3E-A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ \text{より},\ V(3)=\left\langle\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$$

したがって，各基底を並べて $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ と対角化される．ここで，$P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ であり，$P^{-1}A^nP=(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$ より

$$A^n=P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-2^n+2\cdot 3^n & 0 & -2^{n+1}+2\cdot 3^n\\ 0 & 1 & 0\\ 2^n-3^n & 0 & 2^{n+1}-3^n\end{pmatrix}$$

4.2.3
A を対角化してみる．$|tE-A| = \begin{vmatrix} t-7 & 6 \\ -3 & t+2 \end{vmatrix} = t^2-5t+4 = (t-1)(t-4)$ より，固有値は 1 と 4.

$V(1)$ について，$E-A = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ より，$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V(4)$ について，$4E-A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ より，$V(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

したがって，各基底を並べて $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ と対角化され，$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}$．そこで，例えば

$$X = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$X^2 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1} = A$ となる．

4.2.4
与えられた行列を A とする．$|tE-A| = \begin{vmatrix} t-a & -b & -c \\ 0 & t-a & -d \\ 0 & 0 & t+a \end{vmatrix} = (t-a)^2(t+a)$ より，$a \neq 0$ のとき，固有値は a(重複度 2) と $-a$ であり，$a=0$ のとき，固有値は 0(重複度 3).

$a \neq 0$ とする．$V(a)$ について

$$\operatorname{rank}(aE-A) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & -b & -c \\ 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & (b \neq 0) \\ 1 & (b = 0) \end{cases}$$

となるので，$\dim V(a) = 3 - \operatorname{rank}(aE-A) = \begin{cases} 1 & (b \neq 0) \\ 2 & (b = 0) \end{cases}$．よって，$b=0$ が対角化可能であるための条件となる．

$a=0$ とする．$V(0)$ について，$\operatorname{rank}(0E-A) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & -b & -c \\ 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ となるときに限り，$\dim V(0) = 3$ で A が対角化可能より，$b=c=d=0$ がその条件となる．

以上より，A が対角化可能であるための条件は，$a \neq 0$ のとき $b=0$; $a=0$ のとき $b=c=d=0$ である．

4.2.5
A の固有値を重複を込めて $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，ある正則行列 P により，$P^{-1}AP =$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ となる．このとき

$$
\begin{aligned}
&P^{-1}(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_n)P \\
&= (P^{-1}AP-\lambda_1E)(P^{-1}AP-\lambda_2E)\cdots(P^{-1}AP-\lambda_nE) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdots \\
&\quad \cdots \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= O
\end{aligned}
$$

となるので，$(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_n)=O$ であり，$\varphi_A(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_{n-1}t+a_n=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$ より，$A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE=(A-\lambda_1)(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_n)=O$ となる．

4.3.1

与えられた行列をすべて A とおく．固有空間の正規直交基底を求めていく．

(1) $|tE-A|=\begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix}=t-9t+14=(t-2)(t-7)$ より，固有値は 2 と 7.

$V(2)$ について，$2E-A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ より，$V(2)=\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V(7)$ について，$7E-A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ より，$V(7)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V(2), V(7)$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_1\}, \{\boldsymbol{p}_2\}$ として，$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれるので，$P=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とおけば，P は直交行列で ${}^tPAP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

(2) $|tE-A|=\begin{vmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix}=(t-1)^2(t+1)$ より，固有値は 1(重複度 2) と -1.

$V(1)$ について，$E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，$V(1)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

このとき，$\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ は，$V(1)$ の正規直交基底をなす.

$V(-1)$ について，$-E-A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\0 & 2 & 0\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ より，$V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$ であり，正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_3\}$ として，$\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ がとれる。$P = (\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & \sqrt{2} & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ とおけば，P は直交行列で ${}^tPAP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(3) $|tE-A| = \begin{vmatrix}t-1 & 1 & -2\\1 & t-2 & 1\\-2 & 1 & t-1\end{vmatrix} = (t-1)(t-4)(t+1)$ より，固有値は $1,\ 4,\ -1$.

$V(1)$ について

$$E-A = \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\1 & -1 & 1\\-2 & 1 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ より，} V(1) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$V(4)$ について

$$4E-A = \begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\1 & 2 & 1\\-2 & 1 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ より，} V(4) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$V(-1)$ について

$$-E-A = \begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\1 & -3 & 1\\-2 & 1 & -2\end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ より，} V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

それぞれの基底を正規化して並べ，$P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0\\1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ とおくと，P は直交行列で，${}^tPAP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(4) $|tE-A| = \begin{vmatrix}t-a & -1 & -1\\-1 & t-1 & -1\\-1 & -1 & t-a\end{vmatrix} = (t-a-2)(t-a+1)^2$ より，固有値は $a-1$(重複度 2) と $a+2$.

$V(a-1)$ について

$$(a-1)E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix} \text{ より，} V(a-1)=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

グラム・シュミットの直交化法により，$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ から $V(a-1)$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\}$ をつくる．

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ で，} \boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} \text{ で，} \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$V(a+2)$ について

$$(a+2)E-A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ より，} V(a+2)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

から，$V(a+2)$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_3\}$ として，$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ がとれる．

これらの基底を順に並べて，$P=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ とおけば，

$${}^tPAP=\begin{pmatrix}a-1&0&0\\0&a-1&0\\0&0&a+2\end{pmatrix}.$$

4.3.2

実対称行列 A の固有値が λ だけであるとすると，ある直交行列 P により対角化され，対角成分には固有値が並ぶので，${}^tPAP=\lambda E$ となる．${}^tP=P^{-1}$ であるので，$A=P(\lambda E)P^{-1}=\lambda E$ となる．

4.3.3

A を固有値が a と b である 2 次実対称行列とすると，ある直交行列 P により，${}^tPAP=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ と対角化され，$A=P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}{}^tP$ となる．ここで，演習問題 3.4.7 から，2 次直交行列 P は，$\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\\sin\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix}$ の形に表されることを用いる．

$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{aligned} A = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} {}^tP &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha & (a-b)\sin\alpha\cos\alpha \\ (a-b)\sin\alpha\cos\alpha & a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで，$\theta = 2\alpha$ とおけば

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a+a\cos\theta}{2} + \frac{b-b\cos\theta}{2} & \frac{a-b}{2}\sin\theta \\ \frac{a-b}{2}\sin\theta & \frac{a-a\cos\theta}{2} + \frac{b+b\cos\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{a+b}{2}E + \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ のときも

$$A = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha & (a-b)\sin\alpha\cos\alpha \\ (a-b)\sin\alpha\cos\alpha & a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

となるので，上と同じである．

4.3.4

(1) A は対角化可能であり，$\dim V(2) = 1$ である．実ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V(2)$ とすると，定理 4.3.1 から，$(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = x - y = 0$ であるので，$V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となる．

また，$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ から，$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる．したがって，$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$．

(2) A は対角化できることから，$\dim V(2) = 2$ である．実ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(2)$ とすると，$(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) = x - y + z = 0$ であるので

$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, z : \text{任意} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる．

各固有空間の基底を順に並べて，$B=(\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \boldsymbol{b}_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ とおくと，$AB=(A\boldsymbol{b}_1\ \ A\boldsymbol{b}_2\ \ A\boldsymbol{b}_3)=(3\boldsymbol{b}_1\ \ 2\boldsymbol{b}_2\ \ 2\boldsymbol{b}_3)=\begin{pmatrix}3&2&0\\-3&2&2\\3&0&2\end{pmatrix}$ より

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0\\-3&2&2\\3&0&2\end{pmatrix}B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&2&0\\-3&2&2\\3&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&-1&1\\-1&7&-1\\1&-1&7\end{pmatrix}$$

4.4.1

与えられた各 2 次形式を $q(\boldsymbol{x})$ とし，対応する実対称行列を A とする．

(1) $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ であり，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-2&-1\\-1&t-2\end{vmatrix}=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$ より，固有値は 1 と 3.

$V(1)$ について，$E-A=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$ より，$V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$

$V(3)$ について，$3E-A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ より，$V(3)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

それぞれの基底を正規化して，$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とし，直交行列 $P=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ とおくと，${}^tPAP=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ となる．

したがって，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=P\boldsymbol{y}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ の直交変数変換により，$q(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y}=y_1^2+3y_2^2$ となり，標準形になる．

(2) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ であり，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t&-1&-1\\-1&t&-1\\-1&-1&t\end{vmatrix}=(t-2)(t+1)^2$ より，固有値は -1(重複度 2) と 2.

$V(-1)$ について，$-E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ より，$V(-1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$

グラム・シュミットの直交化法により，$V(-1)$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\}$ を求めると

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$V(2)$ について

$$2E-A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ より，}V(2)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ は $V(2)$ の正規直交基底をなす．各正規直交基底を並べて，直交行列 P を

$$P=(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\text{ とおけば，}{}^tPAP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

となる．したがって，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ の直交変数変換により，$q(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y}=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$ となり，標準形になる．

(3) $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&1&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$ であり，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-2&1&1\\1&t-1&-2\\1&-2&t-1\end{vmatrix}=(t+1)(t-1)(t-4)$ より，固有値は $1,\,4,\,-1$．

$V(1)$ について

$$E-A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\1&-2&0\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ より，}V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$V(4)$ について

$$4E-A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ より，}V(4)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$V(-1)$ について

$$-E-A=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-2&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ より，}V(-1)=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

それぞれの基底を正規化して並べて，$P=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}&0\\1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ とおくと，P は直交行列で，${}^tPAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ となる．したがって，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ の直交変数変換により，$q(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y}=y_1^2+4y_2^2-y_3^2$ となり，標準形になる．

(4) $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ であり，演習問題 2.5.2 を用い，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t&0&0&-1\\0&t&-1&0\\0&-1&t&0\\-1&0&0&t\end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix}t&-1\\-1&t\end{vmatrix}\begin{vmatrix}t&1\\1&t\end{vmatrix}=(t-1)^2(t+1)^2$ より，固有値は 1(重複度 2) と -1(重複度 2).

$V(1)$ について，$E-A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$ より，$V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ であり，

$\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ が正規直交基底をなす.

$V(-1)$ について，$-E-A=\begin{pmatrix}-1&0&0&-1\\0&-1&-1&0\\0&-1&-1&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}$ より，$V(-1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

であり，$\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ が正規直交基底をなす.

$P=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3\ \boldsymbol{p}_4)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$ とおくと，P は直交行列であり，${}^tPAP=$ $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ となる．したがって，直交変数変換 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$ により，$q(\boldsymbol{x})=$ ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y}=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$ となり，標準形になる.

4.4.2

A の固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ とする．これらは，定理 4.3.1 より実数である．固有多項式 $\varphi_A(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)=t^3+a_1t^2+a_2t+a_3$ であるので，

$$a_1=-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3),\ a_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1,\ a_3=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

である.

A が正定値とすると，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$ より，$-a_1>0,\ a_2>0,\ -a_3>0$ である.

逆に，$-a_1,a_2,-a_3>0$ とすると，$t\leqq 0$ に対しては $t^3+a_1t^2+a_2t+a_3<0$ より，$\varphi_A(t)=0$ の解 λ_i $(i=1,2,3)$ はすべて正である.

4.4.3
各対応する実対称行列を A とする．
(1) $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{a}{2}\\ \frac{a}{2} & 1\end{pmatrix}$ であり，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1 & -\frac{a}{2}\\ -\frac{a}{2} & t-1\end{vmatrix}=t^2-2t+1-\frac{a^2}{4}=(t-1+\frac{a}{2})(t-1-\frac{a}{2})$ より，固有値は $1\pm\frac{a}{2}$ である．したがって，2 次形式が正定値であるのは，$1\pm\frac{a}{2}>0$，すなわち，$-2<a<2$ のときである．
(2) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & a & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$ であり，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-2 & -2 & 0\\ -2 & t-a & 2\\ 0 & 2 & t-2\end{vmatrix}=(t-2)\{t^2-(a+2)t+2a-8\}$ より，固有値を $2,\alpha,\beta$ としたとき，$\alpha+\beta=a+2,\ \alpha\beta=2a-8$．したがって，2 次形式が正定値であるのは，$\alpha,\beta>0$，すなわち，$\alpha+\beta,\ \alpha\beta>0$ のときであるので，$a>4$ のときである．
(3) $A=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{pmatrix}$ であり，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1 & -a & -a\\ -a & t-1 & -a\\ -a & -a & t-1\end{vmatrix}=(t-2a-1)(t-1+a)^2$ より，固有値は $2a+1$ と $1-a$．したがって，2 次形式が正定値であるのは，$2a+1,\ 1-a>0$ のとき，すなわち，$-\frac{1}{2}<a<1$ のときである．

4.4.4
(1) ${}^t({}^tAA)={}^tA\,{}^t({}^tA)={}^tAA$ より，${}^tAA$ は実対称行列である．次に

$${}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{x}={}^t(A\boldsymbol{x})A\boldsymbol{x}=(A\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x})\geqq 0$$

より，${}^tAA$ は半正定値である．

(2) (1) より，${}^tAA$ は半正定値な実対称行列である．A は正則より，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ のとき $A\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ であり，${}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{x}=(A\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x})>0$ である．よって，${}^tAA$ は正定値である．

4.4.5
2 次の項からなる 2 次形式に対応する実対称行列を A とする．
(1) $A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ であり，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-5 & 1\\ 1 & t-5\end{vmatrix}=t^2-10t+24=(t-4)(t-6)$ より，固有値は 4 と 6.

$V(4)$ について，$4E-A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ より，$V(4)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$

$V(6)$ について，$6E-A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ より，$V(6)=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$

各固有空間の正規直交基底をなす $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ により，$P=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とおくと，P は直交行列であり，${}^tPAP=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ となる．直交変数変換 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ により，$5x^2-2xy+5y^2-12=4X^2+6Y^2-12=0$ となるので，標準形 $\frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{2}=1$ の楕円の方程式をえる．

(2) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ であり，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-3 & -4\\ -4 & t-3\end{vmatrix}=t^2-6t-7=(t-7)(t+1)$ より，固有値は 7 と -1.

$V(7)$ について，$7E-A=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -4 & 4\end{pmatrix}$ より，$\left\langle\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$

$V(-1)$ について，$-E-A=\begin{pmatrix}-4 & -4\\ -4 & -4\end{pmatrix}$ より，$V(-1)=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$

各正規直交基底を並べて，直交行列 $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ により，${}^tPAP=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ となる．直交変数変換 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}u-v\\ u+v\end{pmatrix}$ により

$$
\begin{aligned}
&3x^2+8xy+3y^2-16x-12y-2=7u^2-v^2-\frac{16}{\sqrt{2}}(u-v)-\frac{12}{\sqrt{2}}(u+v)-2\\
&=7u^2-v^2-14\sqrt{2}u+2\sqrt{2}v-2\\
&=7(u-\sqrt{2})^2-(v-\sqrt{2})^2-14=0
\end{aligned}
$$

$X=u-\sqrt{2},\ Y=v-\sqrt{2}$ の平行移動の変数変換により，$7X^2-Y^2=14$，すなわち，標準形 $\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{Y^2}{14}=1$ の双曲線の方程式をえる．

(3) $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ であり，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-4 & -2\\ -2 & t-1\end{vmatrix}=t^2-5t=t(t-5)$ より，固有値は 5 と 0.

$V(5)$ について，$5E-A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ より，$V(5)=\left\langle\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$

$V(0)$ について，$0E-A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ より，$V(0)=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}\right\rangle$

各正規直交基底を並べて，直交行列 $P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ により，${}^tPAP=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ となる．直交変数変換 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2u-v\\ u+2v\end{pmatrix}$ により

$$
\begin{aligned}
&4x^2+4xy+y^2-15x-20y=5u^2-\frac{15}{\sqrt{5}}(2u-v)-\frac{20}{\sqrt{5}}(u+2v)\\
&=5u^2-10\sqrt{5}u-5\sqrt{5}v\\
&=5(u-\sqrt{5})^2-5\sqrt{5}(v+\sqrt{5})
\end{aligned}
$$

$X=u-\sqrt{5},\ Y=v+\sqrt{5}$ の平行移動の変数変換により，$5X^2=5\sqrt{5}Y$，すなわち，標準形 $Y=\frac{1}{\sqrt{5}}X^2$ の放物線の方程式をえる．