第 3 章

3.1.1

(1) $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = (\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_4$ を c_1, c_2, c_3 について解く．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{③+①\times(-3)}]{} \!\!\!\!\!\xrightarrow[\substack{②+①\times(-4)\\③+①\times(-3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{③\times(-1)\\②\leftrightarrow③}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①-②\\③+②\times3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[③\times\frac{1}{4}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①+③\\②+③\times(-2)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

よって，$c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = -1$ より，$\boldsymbol{a}_4 = 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$.

(2) $c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = (\boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\ \ \boldsymbol{a}_4)\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_1$ を c_2, c_3, c_4 について解く．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②-①\\③+①\times(-2)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③+②]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

第 3 行より解のないことがわかる．よって，$\boldsymbol{a}_1$ は $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の 1 次結合で表せない.

3.1.2

与えられた各集合を V とする.

(1) V は $(3\ \ -1\ \ -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ の解空間より，$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

(2) 例えば，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ だが，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$ であるので，V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間でない.

(3) 例えば，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ だが，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin V$ であるので，V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間でない.

(4) V を $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とすると，$\mathbf{0} \in V$ より $b = 0$ である．このとき $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ より，その和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ から $a = 0$ である.

逆に $a=b=0$ のとき，$V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}\,\middle|\, x_1,x_2\in\boldsymbol{R}\right\}=\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である．よって，V は $a=b=0$ のときに限り部分空間となる．

(5) $V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{matrix}2x_1+x_2=0\\-2x_1+x_3=0\end{matrix}\right\}$ は，$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ の解空間より，$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である．

3.1.3

与えられた各集合を V とする．

(1) $A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{b}$ より，$\boldsymbol{0}\notin V$．したがって，V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間でない．

(2) $A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{b}$ は 1 次従属より，$\boldsymbol{0}\in V$ である．次に，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in V$ とすると，$A\boldsymbol{x}_i$ は $\boldsymbol{b}$ と 1 次従属で，$A\boldsymbol{x}_i=c_i\boldsymbol{b}$ と書ける ($c_i\in\boldsymbol{R}$, $i=1,2$))．

$$A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=A\boldsymbol{x}_1+A\boldsymbol{x}_2=c_1\boldsymbol{b}+c_2\boldsymbol{b}=(c_1+c_2)\boldsymbol{b}$$

と $\boldsymbol{b}$ は 1 次従属より，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\in V$ となる．また，$c\in\boldsymbol{R}$ に対して，$A(c\boldsymbol{x}_1)=cA\boldsymbol{x}_1=cc_1\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}$ も 1 次従属より，$c\boldsymbol{x}_1\in V$．したがって，V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である．

3.1.4

まず，$\langle\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\rangle\subset\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle$ を示すため，$\begin{cases}c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3\\d_1\boldsymbol{a}_1+d_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_4\end{cases}$ を同時に解く．すなわち，$(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2)\begin{pmatrix}c_1&d_1\\c_2&d_2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_3\ \ \boldsymbol{a}_4)$ をみたす c_1,c_2,d_1,d_2 を求める．

$$\left(\begin{array}{cc:cc}1&4&1&7\\1&3&2&5\\1&2&3&3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{②-①\\③-①}]{}\left(\begin{array}{cc:cc}1&4&1&7\\0&-1&1&-2\\0&-2&2&-4\end{array}\right)\xrightarrow[②\times(-1)]{}\left(\begin{array}{cc:cc}1&4&1&7\\0&1&-1&2\\0&-2&2&-4\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[\substack{①+②\times(-4)\\③+②\times2}]{}\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&5&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

よって，$c_1=5,c_2=-1,d_1=-1,d_2=2$ であり，$\boldsymbol{a}_3=5\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4=-\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$ となる．したがって，命題 3.1.1 より，$\langle\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\rangle\subset\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle$ である．

逆に，$\begin{pmatrix}5&-1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1=\dfrac{2}{9}\boldsymbol{a}_3+\dfrac{1}{9}\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_2=\dfrac{1}{9}\boldsymbol{a}_3+\dfrac{5}{9}\boldsymbol{a}_4$ から，$\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle\subset\langle\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\rangle$ となる．以上から，$\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle=\langle\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\rangle$ である．

3.1.5

(1) $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$, すなわち，$(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ を c_1, c_2, c_3 について解く．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{①+②}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②+①} \\ \text{③+①}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{②}\times\frac{1}{3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{①−②}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$c_1 = c_2 = c_3 = t$ (t は任意の数) であるので，例えば $t = 1$ として，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を得る．したがって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属である．

(2) $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$, すなわち，$(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ を c_1, c_2, c_3 について解く．

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{①}\leftrightarrow\text{②}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②+①}\times 3 \\ \text{③+①}\times 2}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②−③} \\ \text{②}\times(-1)}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①+②}\times 3 \\ \text{③+②}\times 4 \\ \text{③}\times(-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{①+③}\times 2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．

(別解) $|\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3| = -1 \neq 0$ より，系 3.1.3 から，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．

(3) $|\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & c \\ 1 & c & -2 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = -c^3 - 2c = -c(c^2 + 2)$.

$c \neq 0$ のとき，$|\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3| \neq 0$ となり，系 3.1.3 から，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．

$c = 0$ のとき，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ をみたす c_1, c_2, c_3 を求める．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{②−①}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{②}\leftrightarrow\text{③}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{①+②}\times(-2) \\ \text{③+②}\times 2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_1 - 2c_3 = 0$, $c_2 + c_3 = 0$ より，$c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 1$ が 1 つの解で，$2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ となるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属である．

3.1.6
(1) $c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_r\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{0}$ とすると，$c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_r\boldsymbol{a}_r+0\boldsymbol{a}_{r+1}+\cdots+0\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$ であり，$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立より，$c_1=\cdots=c_r=0$．したがって，$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立である．

(2) $c_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+c_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+\cdots+c_n(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0}$ とすると

$$(c_1+c_n)\boldsymbol{a}_1+(c_1+c_2)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(c_{n-1}+c_n)\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$$

であり，$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立より，$c_1+c_n=c_1+c_2=\cdots=c_{n-1}+c_n=0$．これより，$c_n=-c_1=c_2=-c_3=\cdots=(-1)^{n-1}c_{n-1}=(-1)^n c_n=-c_n$ ($\because n$: 奇数) となり，$c_n=0$ となるので，$c_1=c_2=\cdots=c_{n-1}=c_n=0$．したがって，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_1$ は 1 次独立である．

(3) $n=2m$ とする．

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4)+\cdots+(\boldsymbol{a}_{2m-1}+\boldsymbol{a}_{2m})\\&\qquad-(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)-(\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5)-\cdots-(\boldsymbol{a}_{2m-2}+\boldsymbol{a}_{2m-1})-(\boldsymbol{a}_{2m}+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_1$ は 1 次従属である．

(3) $|P|=0$ とすると，$P\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明でない解 $\boldsymbol{x}(\neq\boldsymbol{0})$ をもつ．このとき

$$(\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_n)P\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

より，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ は 1 次従属である．
　逆に，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ が 1 次従属とすると，ある $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ により，$(\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる．このとき

$$(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_n)P\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

であり，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立から $(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_n)$ は正則行列であるので，$P\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる．$\boldsymbol{x}$ は連立方程式 $P\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の自明でない解となるので，$|P|=0$ である．

3.2.1
与えられた各部分空間を V とする．
(1) $x_1=2t$ とおくと，$x_2=3t,x_3=6t$ より

$$V=\left\{\begin{pmatrix}2t\\3t\\6t\end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\boldsymbol{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\right\rangle$$

よって，$\dim V=1$ で $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\right\}$ は基底.

(2)

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\-3x_1-2x_2\end{pmatrix}\middle|\, x_1,x_2\in\boldsymbol{R}\right\}=\left\{x_1\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\middle|\, x_1,x_2\in\boldsymbol{R}\right\}$$
$$=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ は明らかに 1 次独立で V の基底をなし，$\dim V=2$

(3) $x_1=-2x_2-3x_3,\ x_4=-4x_1-3x_2-2x_3=5x_2+10x_3$ より

$$V=\left\{\begin{pmatrix}-2x_2-3x_3\\x_2\\x_3\\5x_2+10x_3\end{pmatrix}\middle|\, x_2,x_3\in\boldsymbol{R}\right\}=\left\{x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\10\end{pmatrix}\middle|\, x_2,x_3\in\boldsymbol{R}\right\}$$
$$=\left\langle\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\10\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\10\end{pmatrix}$ は明らかに 1 次独立で V の基底をなし，$\dim V=2$.

(4) まず係数行列を行基本変形する.

$$\begin{pmatrix}1&-2&4&-3\\3&1&5&5\\2&-1&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{②+①\times(-3)\\③+①\times(-2)}]{}\begin{pmatrix}1&-2&4&-3\\0&7&-7&14\\0&3&-3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[②\times\frac{1}{7}]{}\begin{pmatrix}1&-2&4&-3\\0&1&-1&2\\0&3&-3&6\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{①+②\times2\\③+②\times(-3)}]{}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

これより

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{l}x_1+2x_3+x_4=0\\x_2-x_3+2x_4=0\end{array}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-2x_3-x_4\\x_3-2x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle|\,x_3,x_4\in\boldsymbol{R}\right\}$$

$$=\left\{x_3\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\middle|\,x_3,x_4\in\boldsymbol{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ は明らかに 1 次独立で V の基底をなし，$\dim V=2$.

3.2.2

例題 3.2.1 と同様に解く.

(1) 行列 $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$ を行基本変形して階段行列にする.

$$\begin{pmatrix}1&3&4&4\\-1&1&8&-8\\2&5&5&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{②+①\\③+①\times(-2)}]{}\begin{pmatrix}1&3&4&4\\0&4&12&-4\\0&-1&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[②\times\frac{1}{4}]{}\begin{pmatrix}1&3&4&4\\0&1&3&-1\\0&-1&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①+②\times(-3)\\③+②}]{}\begin{pmatrix}1&0&-5&7\\0&1&3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，基底として $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ がとれ，$\boldsymbol{a}_3=-5\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4=7\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$.

(2) 行列 $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5)$ を行基本変形して階段行列にする.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&1\\3&2&-5&4&5\\1&3&3&2&-4\\2&4&2&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{②+①\times(-3)\\③-①\\④+①\times(-2)}]{}\begin{pmatrix}1&2&1&3&1\\0&-4&-8&-5&2\\0&1&2&-1&-5\\0&0&0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[②\leftrightarrow③]{}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&1\\0&1&2&-1&-5\\0&-4&-8&-5&2\\0&0&0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{①+②\times(-2)\\③+②\times4}]{}\begin{pmatrix}1&0&-3&5&11\\0&1&2&-1&-5\\0&0&0&-9&-18\\0&0&0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[③\times(-\frac{1}{9})]{}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-3&5&11\\0&1&2&-1&-5\\0&0&0&1&2\\0&0&0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{①+③\times(-5)\\②+③\\④+③}]{}\begin{pmatrix}1&0&-3&0&1\\0&1&2&0&-3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，基底として $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$ がとれ，$\boldsymbol{a}_3 = -3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4$.

3.2.3

まず，$A = (\boldsymbol{a}_1\ , \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\ \ \boldsymbol{a}_4)$ を行基本変形していく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -c \\ 2 & 5 & 2c & -7 \\ 3 & c & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{②+①\times(-2) \\ ③+①\times(-3)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -c \\ 0 & 1 & 2c-2 & 2c-7 \\ 0 & c-6 & -8 & 3c+6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①+②\times(-2) \\ ③+②\times(-c+6)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4c+5 & -5c+14 \\ 0 & 1 & 2c-2 & 2c-7 \\ 0 & 0 & -2(c-2)(c-5) & -2(c-2)(c-9) \end{pmatrix}$$

定理 3.2.9(2) より，$\dim \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle = \operatorname{rank} A$ であり，$\operatorname{rank} A = 2$ となるのは，最後の行列から $-2(c-2)(c-5) = -2(c-2)(c-9) = 0$ となるときであるので，$c = 2$ である.

3.2.4

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立より，定理 3.2.9(1) から $\dim \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle = r$ であり，系 3.2.8 から $V = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$. したがって，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は V の基底である.

(2) $r = \dim V = \dim \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ であり，定理 3.2.9(1) から，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の中で 1 次独立なものの最大個数が r となる. したがって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立となり，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は V の基底である.

3.2.5

基底の延長定理により，ある $\boldsymbol{a}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \boldsymbol{R}^n$ が存在して，$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の基底となる. このとき，$A = (\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r\ \ \boldsymbol{a}_{r+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ は，系 3.1.3 から $|A| \neq 0$ であるので，正則である.

3.2.6

(1) $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + d_r\boldsymbol{a}_r$ とする. このとき，$(c_1 - d_1)\boldsymbol{a}_1 + (c_2 - d_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (c_r - d_r)\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ であり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立であるので，$c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, $\cdots$, $c_r = d_r$. したがって，表し方は一意的である.

(2) まず，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ より，$V = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ である. 次に，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ とすると，$0\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ でもあるので，$\boldsymbol{0}$ の表し方の一意性から $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ となり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立である. したがって，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は V の基底である.

3.3.1

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，$f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり

$$f(2\boldsymbol{a}) = f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 2f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より，f は線形写像でない.

(2) $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&-2\\3&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ より，f は $A=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&-2\\3&-2&1\end{pmatrix}$ の定める線形写像である．表現行列は A.

(3)　f が線形写像とする．$f(\mathbf{0})=\begin{pmatrix}0\\b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ より，$b=-1$. また，$f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}a\\b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$，$f(-\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ であり，$f(-\boldsymbol{e}_2)=-f(\boldsymbol{e}_2)$ より $a=0$ である．

このとき，$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_3\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ より，f は $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$ の定める線形写像である．したがって，$a=0,b=-1$ のときに限り f は線形写像であり，表現行列は A.

(4)　外積の性質より，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^3$, $c\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}),$$
$$f(c\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\times(c\boldsymbol{x})=c(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x})$$

であるので，f は線形写像である．

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix},\quad f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},$$
$$f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

より，f の表現行列は $\begin{pmatrix}0&-3&2\\3&0&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}$.

3.3.2

各表現行列を A とする．

(1)　$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ より，$A\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-4\end{pmatrix}$. したがって，

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix}1&2\\-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-5&2\end{pmatrix}.$$

(2)　$A\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}=\left(A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\ A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\\2&1\end{pmatrix}$ より，$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1\\1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&6\\-1&7\\1&5\end{pmatrix}.$$

3.3.3

各行列を A とする．

(1) $\mathrm{Ker}\, f$ を求めるため，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解く．

$$\begin{pmatrix}2&1&8\\-3&2&-5\\1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{①}\leftrightarrow\text{③}]{}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&2&-5\\2&1&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{②}+\text{①}\times 3\\ \text{③}+\text{①}\times(-2)}]{}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&-2\\0&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{②}\times(-1)]{}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{①}+\text{②}\\ \text{③}+\text{②}\times(-3)}]{}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

これより $\begin{cases}x_1+3x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}$ から $\mathrm{Ker}\, f=\left\{\begin{pmatrix}-3x_3\\-2x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\, x_3\in\boldsymbol{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$．したがって，$\dim \mathrm{Ker}\, f=1$ であり，$\left\{\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathrm{Ker}\, f$ の基底になる．

行基本変形の結果から，$\dim \mathrm{Im}\, f=\mathrm{rank}\, A=2$ である．$\mathrm{Im}\, f$ の基底は，A の列ベクトルの中から 1 次独立な 2 つのベクトルを選んで，例えば $\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底になる．

(2) $\mathrm{Ker}\, f$ を求めるため，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解く．

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&1\\2&-4&2&4\\-3&6&-1&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{②}+\text{①}\times(-2)\\ \text{③}+\text{①}\times 3}]{}\begin{pmatrix}1&-2&3&1\\0&0&-4&2\\0&0&8&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{②}\times(-\frac{1}{4})]{}\begin{pmatrix}1&-2&3&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&8&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{①}+\text{②}\times(-3)\\ \text{③}+\text{②}\times(-8)}]{}\begin{pmatrix}1&-2&0&\frac{5}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

これより，$x_2=s, x_4=2t$ とおくと，$x_1=2s-5t, x_3=-t$ であり

$$\mathrm{Ker}\, f=\left\{\begin{pmatrix}2s-5t\\s\\-t\\2t\end{pmatrix}\middle|\, s,t\in\boldsymbol{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\0\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

したがって，$\dim \mathrm{Ker}\, f=2$ で $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\0\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathrm{Ker}\, f$ の基底になる．

行基本変形の結果から，$\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank}\, A = 2$ である．$\mathrm{Im}\, f$ の基底は，A の列ベクトルの中から 1 次独立な 2 つのベクトルを選んで，例えば $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底になる．

3.3.4

$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 \in \mathrm{Ker}\, f$ とする．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}) &= c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + c_2 f(\boldsymbol{a}_2) + c_3 f(\boldsymbol{a}_3) \\ &= c_1(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + c_2(\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3) + c_3(2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3) \\ &= (c_2 + 2c_3)\boldsymbol{a}_1 + (c_1 + 2c_2 + 3c_3)\boldsymbol{a}_2 + (c_1 - c_2 - 3c_3)\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立より，$c_2 + 2c_3 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 = c_1 - c_2 - 3c_3 = 0$ となる．$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ を c_1, c_2, c_3 について解く．掃き出し法で，① ↔ ② を行って

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-①]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{①+②\times(-2) \\ ③+②\times 3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$c_3 = t$ とおくと，$c_1 = t, c_2 = -2t$ となるので

$$\mathrm{Ker}\, f = \{t(\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \mid t \in \boldsymbol{R}\} = \langle \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 \rangle$$

したがって，$\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$ で $\{\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathrm{Ker}\, f$ の基底になる．

次元定理から，$\dim \mathrm{Im}\, f = 3 - \dim \mathrm{Ker}\, f = 2$ であり，$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$，$f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 \in \mathrm{Im}\, f$ は 1 次独立より，$\{\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底になる．

3.3.5

$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ より f の表現行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，

$g(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より g の表現行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる．

$g\circ f$ の表現行列は，$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ で，$|BA| = 0$ より $g\circ f$ は逆変換をもたない．

$f\circ g$ の表現行列は，$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ で，$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ であるので，$f\circ g$ の逆変換は，$(f\circ g)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -\frac{x_2}{2} \end{pmatrix}$ となる．

3.3.6

(1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \boldsymbol{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ より，

$f(V) = \left\langle f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$．したがって，$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ は $f(V)$ の基底.

(2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y, z \in \boldsymbol{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$,

$$f \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix},$$
$$f \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

より，$f(W) = \left\langle f \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$ であり，$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ は $f(W)$ の基底.

3.3.7

任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $f_A(f_B(\boldsymbol{x})) = AB\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より，$\operatorname{Im} f_B \subset \operatorname{Ker} f_A$ である．よって，定理 3.3.4, 3.3.5 から

$$\operatorname{rank} B = \dim \operatorname{Im} f_B \leqq \operatorname{Ker} f_A = n - \dim \operatorname{Im} f_A = n - \operatorname{rank} A$$

であるので，$\operatorname{rank}, A + \operatorname{rank}, B \leqq n$ である．次に

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$\operatorname{rank} A = 2$ であり，$\operatorname{Ker} f_A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である．$\operatorname{Im} f_B = \operatorname{Ker} f_A$ であれば

$$AB = O, \quad \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = \dim \operatorname{Im} f_A + \dim \operatorname{Im} f_B = \dim \operatorname{Im} f_A + \dim \operatorname{Ker} f_A = 3$$

が成り立つので，例えば，$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ とすればよい.

3.4.1

$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{c^2+14}$, $\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{c^2+14}$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 4c-1$ である．

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ より，$c = \dfrac{1}{4}$.

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos\theta = \dfrac{1}{2} = \dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|} = \dfrac{4c-1}{c^2+14}$ より，$c^2-8c+16 = (c-4)^2 = 0$ となるので，$c = 4$.

$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\cos\theta = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{4c-1}{c^2+14}$ より，$c^2+8c+12 = (c+2)(c+6) = 0$ となるので，$c = -2, -6$.

3.4.2

(1) 左辺 $= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}\|^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2) =$ 右辺

(2) 右辺 $= \dfrac{1}{4}\left\{\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 - \left(\|\boldsymbol{a}\|^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2\right)\right\} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) =$ 左辺

(3) 両辺を 2 乗して比較する．定理 3.4.1 を用いて

$$(\text{左辺})^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 - 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 - 2|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 = (\text{右辺})^2$$

より，左辺 $\leqq$ 右辺 である．

3.4.3

(1) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{7}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ を正規化して，正規直交系 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ を得る．

(2) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{18}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ を正規化して，正規直交系 $\left\{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ を得る．

(3) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{10}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{20}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ を正規化して，正規直交系 $\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ を得る．

3.4.4

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$ と表される．生成するベクトルを順に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ とおき，グラム・シュミットの直交化法を用いる．

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)}{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ を正規化して，正規直交基底 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ を得る．

3.4.5

(1) $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$ とすると，$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i) &= c_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_i) + c_2(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_i) + \cdots + c_n(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_i)\\ &= c_i(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i) = c_i\end{aligned}$$

より，$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{u}_n$.

(2) $c_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_i)$ とおく $(i = 1, 2, \cdots, n)$ と，(1) より

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}\|^2 &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n,\ c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n)\\ &= \sum_{1\leqq i,j\leqq n} c_ic_j(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2\\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1)^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2)^2 + \cdots + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_n)^2\end{aligned}$$

3.4.6

(1) $\|\boldsymbol{u}_1\| = \sqrt{3}a = 1$ より $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であり，$0 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = ac = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$ より $c = 0$ である．次に，$\|\boldsymbol{u}_2\| = \sqrt{2b^2 + c} = \sqrt{2}b = 1$ より $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．また

$$0 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(d - e + f), \quad 0 = (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(d + e)$$

より，$e = -d,\ f = -2d$ となるので，$\|\boldsymbol{u}_3\| = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} = \sqrt{6d^2} = \sqrt{6}d = 1$．よって，$d = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ である．

以上から，$a = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ b = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ c = 0,\ d = \dfrac{1}{\sqrt{6}},\ e = -\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ f = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1) = \left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2) = \left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$,
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_3) = \left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$．したがって，演習問題 3.4.5(1) により

$$\boldsymbol{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}_1 + \frac{5}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{u}_3$$

3.4.7

$A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ を 2 次直交行列とする．

$${}^tAA = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2 + c^2 & ab + cd\\ ab + cd & b^2 + d^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

より，$a^2+c^2=1,\ b^2+d^2=1,\ ab+cd=0$ である．

$$a=\cos\theta,\ c=\sin\theta,\ b=\cos\eta,\ d=\sin\eta\quad(0\leqq\theta,\eta\leqq<2\pi)$$

とおくと，$ab+cd=\cos\theta\cos\eta+\sin\theta\sin\eta=\cos(\theta-\eta)=0$ であるので，$\theta-\eta=\pm\dfrac{\pi}{2},\ \pm\dfrac{3}{2}\pi$ である．よって

$$\eta=\theta+\frac{\pi}{2}\ \left(\text{or }\theta-\frac{3}{2}\pi\right)\text{のとき，}b=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta,\ d=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta,$$
$$\eta=\theta+\frac{3}{2}\pi\ \left(\text{or }\theta-\frac{\pi}{2}\right)\text{のとき，}b=\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\theta,\ d=\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos\theta$$

以上より，$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$.

3.4.8

(1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n,\ c\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}),$$
$$f(c\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{x}-\frac{2(\boldsymbol{a},c\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}=c\left(\boldsymbol{x}-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\right)=cf(\boldsymbol{x})$$

より，f は線形変換である．

(2) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))&=\left(\boldsymbol{x}-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\right)\\&=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{y})+\frac{4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

より，f は直交変換.

(3) 基本列ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ に対して

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},$$
$$f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_2-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{-2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},$$
$$f(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_3-\frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_3)}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

より，$A = (f(\boldsymbol{e}_1)\ \ f(\boldsymbol{e}_2)\ \ f(\boldsymbol{e}_3)) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．また

$$
{}^t\!AA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = E_3
$$

より，A は直交行列である．