第 2 章

2.1.1

(1) 条件から X は 2 次正方行列である．$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ -2a+4c & -2b+4d \end{pmatrix} = O$$

より，$a = 2c,\ b = 2d$ となる．したがって

$$X = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (c, d \text{ は任意の数})$$

(2) 条件から X は 2 次正方行列である．$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+3b \\ c+d & 2c+3d \end{pmatrix}$$

より，$a+2c = a+b,\ b+2d = 2a+3b,\ a+3c = c+d,\ b+3d = 2c+3d.$ となり，$b = 2c,\ d = a+2c$ となる．したがって

$$X = \begin{pmatrix} a & 2c \\ c & a+2c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (a, c \text{ は任意の数})$$

(3) 条件から X は 3×2 行列である．$X = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$ とおくと

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3b & d-3e \\ 2b+c & 2e+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より，$\begin{cases} a-3b = 1 \\ 2b+c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d-3e = 0 \\ 2e+f = 1. \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = 3b+1 \\ c = -2b \end{cases} \quad \begin{cases} d = 3e \\ f = -2e+1. \end{cases}$ したがって

$$X = \begin{pmatrix} 3b+1 & 3e \\ b & e \\ -2b & -2e+1 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b, e \text{ は任意の数})$$

(4) 条件から X は 2 次正方行列である．$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b \\ 3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$b = -3a,\ d = -3c$．したがって

$$X = \begin{pmatrix} a & -3a \\ c & -3c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad (a, d \text{ は任意の数})$$

(5) 条件から X は 1×3 行列である．$X = (a\ \ b\ \ c)$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}(a\ \ b\ \ c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

より，$a = 0, b = -2, c = 3$，すなわち，$X = (0\ \ -2\ \ 3)$.

(6) 条件から X は n 次正方行列である．$X = (x_{ij})$ とおくと

$$XA \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = x_{ij}a_j, \quad AX \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = a_i x_{ij}$$

より，$x_{ij}a_j = a_i x_{ij}$．よって，$x_{ij}(a_j - a_i) = 0$.

これより，$i \neq j$ のとき，$a_j \neq a_i$ から $x_{ij} = 0$ であり，$i = j$ のときは，任意の x_{ii} で成り立つ．したがって，X は (任意の) 対角行列である．

2.1.2

各行列を A とおく．

(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+ab & ab+b^2 \\ a^2+ab & ab+b^2 \end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = (a+b)A$$

これより，$A^3 = A^2A = (a+b)A^2 = (a+b)^2A$．以下同じく

$$\begin{aligned} A^n &= A^2A^{n-2} = (a+b)A^{n-1} = (a+b)A^2A^{n-3} = (a+b)^2A^{n-2} = \cdots \\ &= (a+b)^{n-2}A^2 = (a+b)^{n-1}A \end{aligned}$$

(2)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

したがって，$m \geqq 0$ として

$n = 3m$ のとき，$A^n = (A^3)^m = E^m = E$ （$A^0 = E$ とする．）

$n = 3m+1$ のとき，$A^n = A^{3m}A = A$

$n = 3m+2$ のとき，$A^n = A^{3m}A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B^3 = O$．よって，$B^k = O$ $(k \geqq 3)$.

$n \geqq 2$ とする．$A = aE + B$ であり，$(aE)B = B(aE) = aB$ であるので，2 項定理を用いると

$$\begin{aligned} A^n &= (aE+B)^n = (aE)^n + {}_nC_1(aE)^{n-1}B + {}_nC_2(aE)^{n-2}B^2 \\ &= a^nE + na^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}B^2 \end{aligned}$$

したがって，$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

2.1.3

(1) $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$

$BA = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

(2) (1) より，$A^{-1} = B,\ B^{-1} = A$ であるので，定理 2.1.4(4) から

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) = {}^tB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & -8 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad ({}^tB)^{-1} = {}^t(B^{-1}) = {}^tA = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.4

(1) $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3$

(2) $A\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3\ \ 3\boldsymbol{a}_1 - 4\boldsymbol{a}_2)$

(3) $A(\boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) = (A\boldsymbol{e}_2\ A\boldsymbol{e}_3\ A(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2)$

2.1.5

(1) $XY = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n},$

$$YX = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n}$$

(2)　(1) の結果を利用する．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり，

$$\begin{aligned} &-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって，求める逆行列は $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.1.6

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする．$i > j$ とするとき，AB の (i,j) 成分 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ について，
$\begin{cases} 1 \leqq k < i \text{ のとき } a_{ik} = 0 \\ k \geqq i \text{ のとき } k \geqq i > j \text{ より } b_{kj} = 0 \end{cases}$ である．したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$ となり，AB は上三角行列である．

2.1.7

(1)　${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = A + {}^tA$,　${}^t(A{}^tA) = {}^t({}^tA){}^tA = A{}^tA$,　${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA)$

(2)　${}^tA = A$ かつ ${}^tA = -A$ とすると，$A = -A$ より $2A = O$．したがって，$A = O$ となる．

(3)　正方行列 A に対して，$S = \dfrac{A + {}^tA}{2}$, $T = \dfrac{A - {}^tA}{2}$ とおくと，S は対称行列，T は交代行列であり，$A = S + T$ と表せる．

　次に，S, S' を対称行列，T, T' を交代行列とし $A = S + T = S' + T'$ とする．このとき，$S - S' = T' - T$ であり，$S - S'$ は対称行列，$T' - T$ は交代行列である．実際，${}^t(S - S') = {}^tS - {}^tS' = S - S'$, ${}^t(T' - T) = {}^tT' - {}^tT = -T' + T = -(T' - T)$ である．(2) から，$S - S' = T' - T = O$ となるので，$S = S'$, $T = T'$ であり，表し方の一意性が示された．

(4)　$S = \dfrac{A + {}^tA}{2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $T = \dfrac{A - {}^tA}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば，S は対称行列，T は交代行列であり，$A = S + T$ である．

2.1.8

$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$ とする．

(1) $\mathrm{tr}\,(A+B)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\mathrm{tr}\,A+\mathrm{tr}\,B$

$\mathrm{tr}\,(cA)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}ca_{ii}=c\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=c(\mathrm{tr}\,A)$

(2) $\mathrm{tr}\,(AB)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}b_{1i}+\cdots+a_{in}b_{ni})=\sum_{i=1}^{n}b_{1i}a_{i1}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}b_{ni}a_{in}$

$=BA$ の $(1,1)$ 成分 $+\cdots+BA$ の (n,n) 成分 $=\mathrm{tr}\,(BA)$

(3) (2) より，$\mathrm{tr}\,(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}\,(APP^{-1})=\mathrm{tr}\,A$

(4) $\mathrm{tr}\,(AB-BA)=\mathrm{tr}\,(AB)-\mathrm{tr}\,BA=0$ であるが，$\mathrm{tr}\,E_n=n$ なので，$AB-BA\neq E_n$ である．

2.2.1

(1)

$$\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&7&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{②+①×(−2)}]{}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{①+②×(−3)}]{}\begin{pmatrix}1&0&10\\0&1&3\end{pmatrix}$$ ；階数は 2

(2)

$$\begin{pmatrix}0&-3&6&-7\\0&1&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{①↔②}]{}\begin{pmatrix}0&1&-2&4\\0&-3&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{②+①×3}]{}\begin{pmatrix}0&1&-2&4\\0&0&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{②}\times\frac{1}{5}]{}$$
$$\begin{pmatrix}0&1&-2&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{①+②×(−4)}]{}\begin{pmatrix}0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$ ；階数は 2

(3)

$$\begin{pmatrix}2&-1&3&4\\1&-3&4&1\\-1&1&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{①+③}]{}\begin{pmatrix}1&0&1&7\\1&-3&4&1\\-1&1&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{②−①}\\\text{③+①}}]{}\begin{pmatrix}1&0&1&7\\0&-3&3&-6\\0&1&-1&10\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{②↔③}]{}\begin{pmatrix}1&0&1&7\\0&1&-1&10\\0&-3&3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{③+②×3}]{}\begin{pmatrix}1&0&1&7\\0&1&-1&10\\0&0&0&24\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{③}\times\frac{1}{24}]{}\begin{pmatrix}1&0&1&7\\0&1&-1&10\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{\text{①+③×(−7)}\\\text{②+③×(−10)}}]{}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$ ；階数は 3

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{①}-\text{②}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}-\text{①} \\ \text{④}+\text{①}\times(-3)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{①}-\text{②} \\ \text{③}-\text{②} \\ \text{④}-\text{②}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}\times\frac{1}{5}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}+\text{③}\times(-5) \\ \text{②}+\text{③}\times 2 \\ \text{④}+\text{③}\times 6}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{；階数は} 3$$

(5)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{①}\leftrightarrow\text{②}]{} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}+\text{①}\times(-a) \\ \text{③}-\text{①}}]{} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$

これは $a=1$ のとき，階段行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である (階数は 1)． $a \neq 1$ として，行基本変形を続けると

$$\xrightarrow[\text{②}\leftrightarrow\text{③}]{} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{②}\times\frac{1}{1-a}]{} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}+\text{②}\times(-a) \\ \text{③}+\text{②}\times(a^2-1)}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) \end{pmatrix}$$

これは $a=-2$ のとき，階段行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である (階数は 2)． $a \neq 1, -2$ として，行基本変形を続けると

$$\xrightarrow[\text{③}\times\frac{1}{(1-a)(a+2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}+\text{③}\times(-a-1) \\ \text{②}+\text{③}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

以上から，$a=1$ のとき $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 階数 1; $a=-2$ のとき $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 階数 2; $a\neq 1,-2$ のとき E_3, 階数 3.

(6)

$$\begin{pmatrix}a&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&a\end{pmatrix}\xrightarrow[①\leftrightarrow ⓝ]{}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&a\\1&a&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&a&1\\a&1&\cdots&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[ⓝ+①\times(-a)]{j=2,\cdots,n-1\text{ について }ⓙ-①}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&a\\0&a-1&\cdots&0&1-a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a-1&1-a\\0&1-a&\cdots&1-a&1-a^2\end{pmatrix}$$

これは $a=1$ のとき，階数 1 の階段行列 $\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\&O&\end{pmatrix}$ である．$a\neq 1$ として，行基本変形を続けると

$$\xrightarrow[ⓝ\times\frac{1}{1-a}]{j=2,\cdots,n-1\text{ について }ⓙ\times\frac{1}{a-1}}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&a\\0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1\\0&1&\cdots&1&a+1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{①-ⓙ\\ⓝ-ⓙ}]{j=2,\cdots,n-1\text{ について}}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&a+n-2\\0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&0&a+n-1\end{pmatrix}$$

これは $a=1-n$ のとき，階数 $n-1$ の階段行列 $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&-1\\0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$．$a\neq 1,1-n$ のときには，行基本変形 ⓝ $\times\frac{1}{a+n-1}$ を行い，(n,n) 成分で第 n 列を掃き出すと E_n となる．

以上から，$a=1$ のとき $\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}$, 階数 1; $a=1-n$ のとき $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&-1\\0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$, 階数 $n-1$; $a\neq 1-n,1$ のとき E_n, 階数 n.

2.2.2

$$R_3(1,2;1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ R_3(2,1;1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$R_3(1,2;1)A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7&9\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},$$

$$AR_3(1,2;1)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\4&9&6\\7&15&9\end{pmatrix},$$

$$R_3(2,1;1)A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&7&9\\7&8&9\end{pmatrix},$$

$$AR_3(2,1;1)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&3\\9&5&6\\15&8&9\end{pmatrix}$$

2.2.3

階数 0 の階段行列は O のみ．階数 1 の階段行列は $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&*\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&*&*\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

階数 2 の階段行列は $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&*\\0&1&*\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&*&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. 階数 3 の階段行列は E_3 のみ.

2.2.4

(1)

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&4&6\end{pmatrix}\xrightarrow[②+①\times(-2)]{}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[②\times\frac{1}{2}]{}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[①+②\times(-1)]{}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

であるので，対応する基本行列は順に $R_2(2,1;-2), Q_2(2;\frac{1}{2}), R_2(1,2;-1)$ である.

(2)

$$P=R_2(1,2;-1)Q_2(2;\frac{1}{2})R_2(2,1;-2)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-\frac{1}{2}\\-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

とすれば，(1) の結果から PA は階段行列になる.

次に，列基本変形により $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\boxed{3}+\boxed{1}\times(-1)\\\boxed{3}+\boxed{2}\times(-1)}]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ と標準形になる．よって，

$Q=R_3(1,3;-1)R_3(2,3;-1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ とすれば，PAQ は標準形になる.

2.2.5

ある正則行列 P, Q により，PAQ は標準形 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 型になる．このとき

$$PAQPAQ = PAQ$$

となる．両辺に左から P^{-1}，右から Q^{-1} をかけると $AQPA = A$ となる．よって，$B = QP$ とおくと，B は正則で $ABA = A$ である．

2.3.1

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②+①\times(-2) \\ ③+①\times(-5)}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -12 & -16 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[②\times(-\frac{1}{5})]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & -16 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①+②\times(-2) \\ ③+②\times 12}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[③\times\frac{1}{4}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①+③ \\ ②+③}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

よって，$x = 2,\ y = 3,\ z = 1.$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & -7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②+①\times(-2) \\ ③+①\times(-4)}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[②\times(-\frac{1}{2})]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①+②\times(-3) \\ ③+②\times 6}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって，$\begin{cases} x - \frac{5}{2}z = \frac{1}{2} \\ y + \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ であるので，$z = 2t$ とおくと，$x = 5t + \frac{1}{2}$，$y = -t + \frac{1}{2}$，$z = 2t$ （t は任意の数）

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{②+①\times(-2) \\ ③-① \\ ④-①}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{①+②\times 2 \\ ③-② \\ ④+②\times 2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} x+z-4w=0 \\ y-z-3w=0 \end{cases}$ であるので，$z = s, w = t$ とおくと，$x = -s+4t$, $y=s+3t,\ z=s,\ w=t\ \ (s,t$ は任意の数).

(4)

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②+①\times(-3) \\ ③+①\times 2 \\ ④+①}]{} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①+② \\ ④-② \\ ③\times\frac{1}{3}}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①+③\times 4 \\ ②+③\times 5 \\ ④+③\times(-5)}]{} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①+④\times(-5) \\ ②+④\times(-4) \\ ③-④}]{} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

よって，$x=2,\ y=3,\ z=2,\ w=1.$

2.3.2

(1) 拡大係数行列を行基本変形すると

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2a & a \\ 2a & 4a^2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[②+①\times(-2a)]{} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2a & a \\ 0 & 0 & 2-2a^2 \end{array}\right)$$

であるので，$2-2a^2=0$，すなわち，$a=\pm 1$ のときに解をもつ．

$a=1$ のとき，$x+2y=1$ より，$y=t$ とおくと，$x=-2t+1,\ y=t\ \ (t$ は任意の数),

$a=-1$ のとき，$x-2y=-1$ より，$y=t$ とおくと，$x=2t-1,\ y=t\ \ (t$ は任意の数).

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & a \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②+① \\ ③+①\times(-2)}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & a-4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①+②\times(-3) \\ ③+②\times 2}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

よって，$a=-2$ のときに解をもつ．このとき $\begin{cases} x+z=-7 \\ y-2z=3 \end{cases}$ であるので，$z=t$ とおくと，$x=-t-7,\ y=2t+3,\ z=t\ \ (t$ は任意の数).

2.3.3

(1) 定理 2.3.2 より，自明でない解をもつ $\Longleftrightarrow$ (係数行列の階数) <3(未知数の個数).

$$\begin{pmatrix} 1 & 4a & 0 \\ 0 & 1 & 2a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①\times(-a)]{} \begin{pmatrix} 1 & 4a & 0 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & -4a^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{①+②\times(-4a) \\ ③+②\times 4a^2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1+8a^3 \end{pmatrix}$$

これより，$1+8a^3=(1+2a)(1-2a+4a^2)=0$，すなわち，$a=-\frac{1}{2}$ のときに自明でない解をもつ．このとき，最後の行列は $\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ より，$\begin{cases}x-2y=0\\y-z=0\end{cases}$ であり，解は，$x=2t,\ y=z=t$ (t は任意の数).

(2) (係数行列の階数) $<$ 4 のときに自明でない解をもつので，階数行列の階数を調べる．

$$\begin{pmatrix}1&1&1&a\\1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{②-①\\③-①\\④+①\times(-a)}]{}\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&a-1&1-a\\0&a-1&0&1-a\\0&1-a&1-a&1-a^2\end{pmatrix}$$

$a=1$ のとき，階数 1 の階段行列 $\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\&O&\end{pmatrix}$ となるので自明でない解をもつ．$x+y+z+w=0$ であるので，解は，$x=-s-t-u,\ y=s,\ z=t,\ w=u$ (s,t,u は任意の数).

$a\neq 1$ とする．②, ③, ④ を $\frac{1}{a-1}$ 倍して行基本変形を続ける．

$$\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&1&-1\\0&1&0&-1\\0&-1&-1&-a-1\end{pmatrix}\xrightarrow[②\leftrightarrow③]{}\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&-1&-1&-a-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{①-②\\④+②}]{}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&1&a+1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&-1&-a-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{①-③\\④+③}]{}\begin{pmatrix}1&0&0&a+2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&-a-3\end{pmatrix}$$

これより，$-a-3=0$，すなわち，$a=-3$ のとき，階数 3 の階段行列となるので，自明でない解をもつ．解は，$x=y=z=w=t$ (任意の数).

2.3.4

与えられた各行列を A とする．

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&5&1&0&0\\2&5&6&0&1&0\\1&3&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{②+①\times(-2)\\③-①}]{}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&5&1&0&0\\0&3&-4&-2&1&0\\0&2&-3&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[②-③]{}$$
$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&5&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&-1\\0&2&-3&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{①-②\\③+②\times(-2)}]{}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&2&-1&1\\0&1&-1&-1&1&-1\\0&0&-1&1&-2&3\end{array}\right)\xrightarrow[③\times(-1)]{}$$
$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&2&-1&1\\0&1&-1&-1&1&-1\\0&0&1&-1&2&-3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{①+③\times(-6)\\②+③}]{}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&8&-13&19\\0&1&0&-2&3&-4\\0&0&1&-1&2&-3\end{array}\right)$$

よって，$A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -13 & 19\\ -2 & 3 & -4\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[①-②]{}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1 & -2 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[①\times(-1)]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[②+①\times(-3)]{}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 5 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[②\times(-1)]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -5 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{①+②\times(-2)\\ ③-②}]{}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 7 & 5 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -5 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[③\times\frac{1}{3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 7 & 5 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -5 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{①+③\times(-7)\\ ②+③\times 5}]{}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -2 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right)$$

よって，$A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-6 & 5 & -7\\ 6 & -4 & 5\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{②-①\\ ③-①}]{}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a-1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

これより，$a=1$ のとき，$\operatorname{rank}A=1$ であるので，A は正則でない．以下，$a\neq 1$ とする．②, ③ を $\frac{1}{a-1}$ 倍して行基本変形を続ける．

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{①-②\\ ①-③}]{}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & \frac{a+1}{a-1} & \frac{-1}{a-1} & \frac{-1}{a-1}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1}\end{array}\right)$$

よって，$a\neq 1$ のとき $A^{-1}=\dfrac{1}{a-1}\begin{pmatrix}a+1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4)

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{②-①\\③-①\\④-①}]{}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&-1&0&1&0\\0&1&1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{③-②\\④-②}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1&1&0\\0&0&1&1&0&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[④-③]{}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right)$$

よって，$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$.

(5)

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&1&2&0&1&0&0&0\\2&3&2&2&0&1&0&0\\2&3&3&1&0&0&1&0\\0&1&3&-2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{②+①\times(-2)\\③+①\times(-2)}]{}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&1&2&0&1&0&0&0\\0&1&-2&2&-2&1&0&0\\0&1&-1&1&-2&0&1&0\\0&1&3&-2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{①-②\\③-②\\④-②}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&4&-2&3&-1&0&0\\0&1&-2&2&-2&1&0&0\\0&0&1&-1&0&-1&1&0\\0&0&5&-4&2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{①+③\times(-4)\\②+③\times2\\④+③\times(-5)}]{}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&2&3&3&-4&0\\0&1&0&0&-2&-1&2&0\\0&0&1&-1&0&-1&1&0\\0&0&0&1&2&4&-5&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①+④\times(-2)\\③+④}]{}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&-1&-5&6&-2\\0&1&0&0&-2&-1&2&0\\0&0&1&0&2&3&-4&1\\0&0&0&1&2&4&-5&1\end{array}\right)$$

よって，$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-5&6&-2\\-2&-1&2&0\\2&3&-4&1\\2&4&-5&1\end{pmatrix}$.

2.3.5

行基本変形に対応する基本行列の積 P により，$P(A\ \ B)=(PA\ \ PB)=(E\ \ PB)$ となれば，$PA=E$ から A は正則で $P=A^{-1}$ であり，$AX=B$ をみたす $X=A^{-1}B=PB$ である．

(1)

$$\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②+①×(−2)}]{} \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②}\times(-\frac{1}{2})]{} \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[\text{①+②×(−3)}]{} \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

よって，$X = \begin{pmatrix} -8 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{②−①} \\ \text{③+①×(−2)}}]{} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{①−②} \\ \text{③+②×(−3)}}]{}$$
$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{①+③} \\ \text{②+③×(−2)}}]{} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

よって，$X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

2.3.6

正方行列 A が行基本変形により単位行列になるとき，対応する基本行列 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ により $F_k \cdots F_2 F_1 A = E$ であるので，$A = (F_k \cdots F_2 F_1)^{-1} = F_1^{-1} F_2^{-1} \cdots F_k^{-1}$ となる．ここで，各 F_j^{-1} は定理 2.2.2 から基本行列である．基本変形の積での表し方は一意的ではないので，それぞれ 1 つの例を示す.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②+①×(−2)} \\ \text{③+①×(−4)}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③+②×(−3)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より，$R_3(3,2;-3)R_3(3,1;-4)R_3(2,1;-2)A = E$ であるので

$$A = R_3(2,1;-2)^{-1}R_3(3,1;-4)^{-1}R_3(3,2;-3)^{-1} = R_3(2,1;2)R_3(3,1;4)R_3(3,2;3)$$

と表せる.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{②+①×}(-b)]{} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c-ab \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{②}\times\frac{1}{c-ab}]{} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{①+②×}(-a)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より，$R_2(1,2;-a)Q_2(2;\frac{1}{c-ab})R_2(2,1;-b)A=E$ であるので

$$A=R_2(2,1;-b)^{-1}Q_2\left(2;\frac{1}{c-ab}\right)^{-1}R_2(1,2;-a)^{-1}=R_2(2,1;b)Q_2(2;c-ab)R_2(1,2;a)$$

と表せる．

2.4.1

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},$$
$$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},$$
$$\sigma^{-1}\tau^{-1}=(\tau\sigma)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$$

2.4.2
例 2.4.5 の方法 2 で転倒数を求めて符号を求めてみる．
(1)　順列 $(3\ 4\ 6\ 1\ 2\ 5)$ に対して，$t_1=2, t_2=2, t_3=3, t_4=0, t_5=0, t_6=0$ より，$T(\sigma)=7$．したがって，$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^7=-1$．

(2)　順列 $(2\ 3\ 4\ \cdots\ n-1\ n\ 1)$ に対して，$j=1,2,\cdots,n-1$ について $t_j=1$ であり，$t_n=0$ より，$T(\tau)=n-1$．したがって，$\operatorname{sgn}\tau=(-1)^{n-1}$．

2.4.3
(1)　任意の $i=1,2,\cdots,n$ に対して，$((\rho\sigma)\tau)(i)=(\rho\sigma)(\tau(i))=\rho(\sigma(\tau(i)))$ であり，$(\rho(\sigma\tau))(i)=\rho((\sigma\tau)(i))=\rho(\sigma(\tau(i)))$ より，$(\rho\sigma)\tau=\rho(\sigma\tau)$．

(2)　$\sigma\tau=\rho\tau$ とする．任意の i に対して，ある j により $\tau(j)=i$ であり，$(\sigma\tau)(j)=(\rho\tau)(j)$ より，$\sigma(i)=\sigma(\tau(j))=\rho(\tau(j))=\rho(i)$．したがって，$\sigma=\rho$．

(3)　$\sigma\tau\in S_n$ であり，(2) より $\sigma\neq\sigma'$ のとき $\sigma\tau\neq\sigma'\tau$ であるので，σ が重複なく S_n 全体 ($n!$ 個) を動くとき $\rho=\sigma\tau$ も S_n 全体 ($n!$ 個) を重複なく動く．

(4)　$\sigma^{-1}=\sigma'^{-1}$ とするとき，左から σ，右から σ' をかけて，$\sigma\sigma^{-1}\sigma'=\sigma\sigma'^{-1}\sigma'$ から $\sigma'=\sigma$．よって，$\sigma\neq\sigma'$ のとき $\sigma^{-1}\neq\sigma'^{-1}$ となるので，σ が S_n 全体を重複なく動くとき σ^{-1} も S_n 全体を重複なく動く．

2.4.4
τ を奇置換の 1 つとする．σ が偶置換のとき $\sigma\tau$ は，命題 2.4.1 より奇置換であり，前問 (2) から，$\sigma\neq\sigma'$ ならば $\sigma\tau\neq\sigma'\tau$ なので，(偶置換の個数) $\leqq$ (奇置換の個数) である．一方，σ が奇置換のとき $\sigma\tau$ は偶置換より，同じく (奇置換の個数) $\leqq$ (偶置換の個数) となる．

以上より，(偶置換の個数) $=$ (奇置換の個数) であり，S_n の置換全体は $n!$ 個であるので，(偶置換の個数) $=$ (奇置換の個数) $=\frac{n!}{2}$ 個となる．

2.4.5
(1)

$$\begin{vmatrix}2020&2018\\2019&2017\end{vmatrix}\underset{①-②}{=}\begin{vmatrix}1&1\\2019&2017\end{vmatrix}=2017-2019=-2$$

(2)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}(12+15+28-8-18-35) = -5$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 13 & 29 & 40 \\ 23 & 46 & 61 \end{vmatrix} \underset{\substack{②+①\times(-13) \\ ③+①\times(-23)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-8) = -24$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{②-①}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{③-②}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ (\because 3\text{ 行} = 4\text{ 行})$$

(5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{②+①\times(-2) \\ ③+①\times(-3) \\ ④+①\times(-4)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{③-② \\ ④-②}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

(6)

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \underset{\substack{②-① \\ ③-① \\ ④-①}}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \underset{\substack{③-② \\ ④-②}}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} \underset{④-③}{=}$$

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

(7)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \underset{①+(②+③+④)}{=} \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{②+①\times(-b) \\ ③+①\times(-b) \\ ④+①\times(-b)}}{=} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$$

(8) $n=2m$ または $2m+1$ とする．$i=1,2,\cdots,m$ について，第 i 行と第 $n-i+1$ 行を入れ替えると

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1\,n} \\ \vdots & \iddots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ 0 & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \\ 0 & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^m a_{1n} a_{2\,n-1} \cdots a_{n1}$$

2.4.6

(1) $|A^2| = |A|^2 = a^2,\ |2A| = |2EA| = |2E|\,|A| = 2^n a,\ |{}^t\!AB| = |{}^t\!A|\,|B| = |A|\,|B| = ab$

(2) $1 = |E| = |AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$ より，$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{a}$,
$|A^{-1}BA| = |A^{-1}|\,|B|\,|A| = \frac{1}{a}ba = b$

2.4.7

(1) 定理 2.4.7 を用いて

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ax-by & -(ay+bx) \\ ay+bx & ax-by \end{vmatrix}$$

より，$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax-by)^2 + (ay+bx)^2$.

(2)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \right|$$
$$= \begin{vmatrix} ax+bz+cy & ay+bx+cz & az+by+cx \\ cx+az+by & cy+ax+bz & cz+ay+bx \\ bx+cz+ay & by+cx+az & bz+cy+ax \end{vmatrix}$$

より，$u = ax+bz+cy,\ v = ay+bx+cz,\ w = az+by+cx$ とおくと

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz) = u^3+v^3+w^3-3uvw$$

2.4.8

AB の第 j 列は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\boldsymbol{a}_j$ より

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \left| \sum_{k(1)=1}^{n} b_{k(1)1}\boldsymbol{a}_{k(1)} \quad \sum_{k(2)=1}^{n} b_{k(2)1}\boldsymbol{a}_{k(2)} \quad \cdots \quad \sum_{k(n)=1}^{n} b_{k(n)n}\boldsymbol{a}_{k(n)} \right| \\
&= \sum_{1 \leqq k(1), k(2), \cdots, k(n) \leqq n} b_{k(1)1}b_{k(2)2}\cdots b_{k(n)n} \left| \boldsymbol{a}_{k(1)} \;\; \boldsymbol{a}_{k(2)2} \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{a}_{k(n)} \right| \quad (\because \text{定理 } 2.4.3) \\
&= \sum_{(k(1)\,k(2)\,\cdots\,k(n)):\text{順列}} b_{k(1)1}b_{k(2)2}\cdots b_{k(n)n} \left| \boldsymbol{a}_{k(1)} \;\; \boldsymbol{a}_{k(2)2} \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{a}_{k(n)} \right| \quad (\because \text{系 } 2.4.5) \\
&= \sum_{\tau \in S_n} b_{\tau(1)1}b_{\tau(2)2}\cdots b_{\tau(n)n}\mathrm{sgn}\,(\tau) \left| \boldsymbol{a}_1 \;\; \boldsymbol{a}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{a}_n \right| \quad (\because \text{定理 } 2.4.4) \\
&= |B||A|
\end{aligned}
$$

2.5.1

(1) 定理 2.5.1 により

$$
\begin{vmatrix} 10 & 9 & 0 & 0 \\ 11 & 10 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 13 & 12 & 11 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1
$$

(2) 第 2 行で展開をすると

$$
\begin{vmatrix} 5 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (20 + 4 - 6 - 15) = 18
$$

(3) 第 1 行で展開をすると

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2(8 - 2 - 2) + (-4 + 1) = 5
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{②+①\times(-3) \\ ③-① \\ ④+①\times(-2)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{第 1 列} \\ \text{で展開}}}{=} \begin{vmatrix} -7 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21+8-24-7 = -2
$$

(5) 第 1 列の共通因子 3 をだすと

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{\boxed{3}-\boxed{1} \\ \boxed{4}-\boxed{1}}}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{第 1 行} \\ \text{で展開}}}{=} 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(24 - 24 + 54 - 36 + 12 - 72) = -126$$

(6) 定理 2.5.1 が使えるように変形してみると

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \\ 0 & b & c & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\boxed{3}\leftrightarrow\boxed{4} \\ \boxed{2}\leftrightarrow\boxed{3}}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ c & b & d & a \\ b & a & c & d \\ 0 & 0 & b & c \end{vmatrix} \underset{\substack{①\leftrightarrow② \\ ②\leftrightarrow③}}{=} \begin{vmatrix} c & b & d & a \\ b & a & c & d \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = (ac - b^2)^2$$

2.5.2

$j = 1, \cdots, n$ について，第 j 列を第 $n+j$ 列に加えると

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A+B \\ B & A+B \end{vmatrix} \underset{i\,\text{行}-(n+i)\,\text{行}}{\overset{\substack{i=1,\cdots,n \\ \text{について}}}{=}} \begin{vmatrix} A-B & O \\ B & A+B \end{vmatrix} = |A-B||A+B|$$

2.5.3

(1) 前問の結果を用いると

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 5 & 3 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 5 & 3 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 2 \\ 6 & a+3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-2 & 0 \\ -4 & a-3 \end{vmatrix} = (a^2 + 5a - 6)(a-2)(a-3)$$

$$= (a+6)(a-1)(a-2)(a-3)$$

(2) 前問の結果から

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a-c \end{vmatrix} = \{(a+c)^2 - (b+d)^2\}\{(a-c)^2 - (b-d)^2\}$$

$$= (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)$$

2.5.4

n に関する帰納法により示す．$n = 2$ のとき，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$ より成り立っている．

$n-1$ で成り立つと仮定する．$i=1,\cdots,n-1$ について，第 $i+1$ 行 + 第 i 行 $\times(-a_1)$ を行うと

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ {a_1}^2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {a_1}^{n-1} & {a_2}^{n-1} & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {a_2}^{n-2}(a_2-a_1) & \cdots & {a_n}^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{第 1 列}\\\text{で展開}}}{=}$$

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ {a_2}^{n-2}(a_2-a_1) & \cdots & {a_n}^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} = (a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ {a_2}^{n-2} & \cdots & {a_n}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{n-1\text{ の}\\\text{仮定}}}{=} (a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqq i<j\leqq n}(a_j-a_i) = \prod_{1\leqq i<j\leqq n}(a_j-a_i)$$

よって，n でも成り立つことが示された．

(別解)
$a_1,\cdots,a_n$ を n 個の変数と見なすとき，左辺行列式の第 i 行にはこれらの $i-1$ 次のべきが並び，行列式は各行から 1 つずつ選ばれた成分をかけたものの和差になっていることから，左辺行列式は $a_1,\cdots,a_n$ の $\dfrac{n(n-1)}{2}(=1+2+\cdots+(n-1))$ 次の多項式である．$i<j,\ a_i=a_j$ とすると，左辺行列式は第 i 列と第 j 列が一致するので 0 となる．したがってこの多項式は (a_j-a_i) で割り切れる．$i<j$ となる組 $\{i,j\}$ の総数は ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ より，左辺と右辺の次数は等しく，左辺は右辺の定数倍である．そこで，$a_2a_3^2\cdots a_n^{n-1}$ の係数をみると，左辺右辺ともに 1 であるので，等式が成り立つ．

2.5.5

(1) 転置をして前問を用いる．

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 121 \\ 1 & 13 & 169 \\ 1 & 15 & 225 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & 13 & 15 \\ 11^2 & 13^2 & 15^2 \end{vmatrix} = (13-11)(15-11)(15-13)=16$$

(2) 各列から共通因子をだしてから前問を用いる．

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}$$

$$=120(3-2)(4-2)(4-3)(5-2)(5-3)(5-4)=14400$$

(3) 第 2 列，第 3 列から共通因子をだして前問を用いる．

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2^3 & 1 \\ -1 & a^2 & 2^4 & 3 \\ 1 & a^3 & 2^5 & 3^2 \\ -1 & a^4 & 2^6 & 3^3 \end{vmatrix} = 2^3 a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 3 \\ (-1)^2 & a^2 & 2^2 & 3^2 \\ (-1)^3 & a^3 & 2^3 & 3^3 \end{vmatrix}$$
$$= 8a(a+1)(2+1)(2-a)(3+1)(3-a)(3-2) = 96a(a+1)(a-2)(a-3)$$

2.5.6

与えられた各行列を A とする．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$ より，A は逆行列をもつ．

$$\widetilde{a_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \widetilde{a_{21}} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \widetilde{a_{31}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\widetilde{a_{12}} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ \widetilde{a_{22}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \widetilde{a_{32}} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\widetilde{a_{13}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2,\ \widetilde{a_{23}} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3,\ \widetilde{a_{33}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

であるので $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$．

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$ より，A は逆行列をもつ．

$$\widetilde{a_{11}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2,\ \widetilde{a_{21}} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1,\ \widetilde{a_{31}} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$
$$\widetilde{a_{12}} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7,\ \widetilde{a_{22}} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8,\ \widetilde{a_{32}} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$
$$\widetilde{a_{13}} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8,\ \widetilde{a_{23}} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10,\ \widetilde{a_{33}} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

であるので $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -7 & 8 & 2 \\ 8 & 10 & -1 \end{pmatrix}$．

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ より，A は逆行列をもつ.

$$\widetilde{a_{11}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ \widetilde{a_{21}} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ \widetilde{a_{31}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \widetilde{a_{41}} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\widetilde{a_{12}} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ \widetilde{a_{22}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \widetilde{a_{32}} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \widetilde{a_{42}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\widetilde{a_{13}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \widetilde{a_{23}} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \widetilde{a_{33}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ \widetilde{a_{43}} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\widetilde{a_{14}} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \widetilde{a_{24}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \widetilde{a_{34}} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ \widetilde{a_{44}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

であるので，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5.7

(1) 係数行列を A とすると，$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -3 \\ b & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4a+3b}{17}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3a+2b}{17}$$

(2) 係数行列を A とすると，$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 5$.

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -\frac{6}{5}, \quad y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1, \quad z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}$$

(2) 係数行列を A とすると，$|A| = \begin{vmatrix} -2 & a & 1 \\ 1 & -2 & a \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = a^3 + 6a - 7 = (a-1)(a^2+a+7)$

であり，$a^2+a+7>0$, $a \neq 1$ より $|A| \neq 0$.

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -2 & a \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{a^2-3a+5}{(a-1)(a^2+a+7)},$$

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{a^2+3a-1}{(a-1)(a^2+a+7)},$$

$$z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -2 & a & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-a^2+a+3}{(a-1)(a^2+a+7)}$$

2.5.8

第 1 行での展開を考えることにより $ax+by+cz+d=0$ の形になるので，平面の方程式を表している．行列式の性質から，$i=1,2,3$ について，$x=x_i, y=y_i, z=z_i$ とすると行列式の値は 0 より，方程式をみたす．したがって，3 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ を通る平面の方程式を表している．

3 点 $\mathrm{P}_1(1,2,3), \mathrm{P}_2(2,5,3), \mathrm{P}_3(3,2,4)$ を通る平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3x - 7 - 6z + 17 = 0$$