第 1 章

1.1.1

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 3-0\cdot 2\\-5\cdot 3+(-2)\cdot 2\\5\cdot 0-(-2)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-19\\-2\end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-3)-(-2)\cdot(-4)\\-2\cdot(-3)+1\cdot(-4)\\2\cdot(-2)-1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\2\\-5\end{pmatrix}$

1.1.2

外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のどちらのベクトルにも直交する座標空間内のベクトルを与えるので，求めるベクトル $\boldsymbol{n}$ は長さが 1 になるようにすればよい．

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)-1\cdot(-1)\\-1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)\\1\cdot 1-(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix},$$

$$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$$

よって，外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と同じ向き・逆向きの 2 つの向きがあることを注意して，

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$$

1.1.3

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}b_2c_3-c_2b_3\\-b_1c_3+c_1b_3\\b_1c_2-c_1b_2\end{pmatrix}$ である．このとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=\begin{pmatrix}a_2(b_1c_2-b_2c_1)-(-b_1c_3+c_1b_3)a_3\\-a_1(b_1c_2-c_1b_2)+(b_2c_3-c_2b_3)a_3\\a_1(-b_1c_3+c_1b_3)-(b_2c_3-c_2b_3)a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_2b_2+a_3b_3)c_1\\(a_1c_1+a_3c_3)b_2-(a_1b_1+a_3b_3)c_2\\(a_1c_1+a_2c_2)b_3-(a_1b_1+a_2b_2)c_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1\\(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_2\\(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})c_1\\(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})c_2\\(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})c_3\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

1.1.4

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ とおく．

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-b_2a_3\\-a_1b_3+b_1a_3\\a_1b_2-b_1a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(b_2a_3-a_2b_3)\\-(-b_1a_3+a_1b_3)\\-(b_1a_2-a_1b_2)\end{pmatrix}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

ここで，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ とすると，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}$ より，$2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，すなわち，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ である．

(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} a_2(b_3+c_3)-(b_2+c_2)a_3 \\ -a_1(b_3+c_3)+(b_1+c_1)a_3 \\ a_1(b_2+c_2)-(b_1+c_1)a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_2b_3-b_2a_3)+(a_2c_3-c_2a_3) \\ (-a_1b_3+b_1a_3)+(-a_1c_3+c_1a_3) \\ (a_1b_2-b_1a_2)+(a_1c_2-c_1a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3-b_2a_3 \\ -a_1b_3+b_1a_3 \\ a_1b_2-b_1a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2c_3-c_2a_3 \\ -a_1c_3+c_1a_3 \\ a_1c_2-c_1a_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

(3) (1) と (2) により，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}) = (-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

(4) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} (\lambda a_2)b_3-b_2(\lambda a_3) \\ -(\lambda a_1)b_3+b_1(\lambda a_3) \\ (\lambda a_1)b_2-b_1(\lambda a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a_2b_3-b_2a_3) \\ \lambda(-a_1b_3+b_1a_3) \\ \lambda(a_1b_2-b_1a_2) \end{pmatrix} = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$．(2) より，$\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}) = -(\lambda\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$ であるので，$\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}) = -(\lambda\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a} = -\lambda(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) = \lambda(-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ である．また，$\lambda = 0$ とおくと，$0\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ であるので，$\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{a} = (0\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a} = 0(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ である．同様に，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ である．

1.1.5

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{a}) = (a_2b_3-b_2a_3)a_1+(-a_1b_3+b_1a_3)a_2+(a_1b_2-b_1a_2)a_3 = 0$ であるので，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$ である．同様に $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{b}) = 0$ であることがわかるので，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$ である．

(2) 外積の定義により，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff a_2b_3-b_2a_3 = -a_1b_3+b_1a_3 = a_1b_2-b_1a_2 = 0 \iff a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3$ である．よって，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ である．

(3) $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \sqrt{(a_2b_3-b_2a_3)^2+(-a_1b_3+b_1a_3)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2}$
$= \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})^2}$

また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，$(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ であるから，$\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})^2} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2(1-\cos^2\theta)} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\sin^2\theta} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ である．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ であるから，その面積の 2 倍である $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積に等しい．

(4) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の底面として，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形を考える．また，この底面に垂直な単位ベクトルとして，$\dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ がある．この平行六面体の高さはこの単位ベクトルの方向への $\boldsymbol{c}$ の正射影と考えることができるので，内積の幾何的な意味に注意すると，高さは $\left|\left(\dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{c}\right)\right| = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}\,|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{c})|$ である．また，(3) により，底面の面積は $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ に等しい．

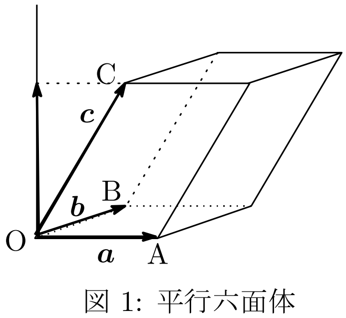


図 1: 平行六面体

よって，平行六面体の体積は $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|\cdot\dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c})| = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c})|$ である．

1.2.1

点 A （原点を基点とする位置ベクトル $\boldsymbol{a}$）を通り，方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ の直線について，媒介変数 t によるベクトル表示は

$$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$$

で与えられる．

(1) 点 A の位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a} = {}^t(-2\,3\,1)$ であり，方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} = {}^t(5\,2\,-1)$ であるので，直線のベクトル表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t-2 \\ 2t+3 \\ -t+1 \end{pmatrix}$$

である．媒介変数 t を消去することにより，求める直線の方程式

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

を得る．

(2) 方向ベクトルとして，$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = {}^t(-3\,0\,4)$ をとると，媒介変数 t による直線のベクトル表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t+1 \\ 3 \\ 4t-2 \end{pmatrix}$$

である．媒介変数 t を消去することにより，求める直線の方程式

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{z+2}{4}, \quad y = 3$$

を得る．

1.2.2

平面の法線ベクトルはその平面に垂直なベクトルのことであるので，2 枚の平面のなす角を調べるためにはそれらの法線ベクトルのなす角について調べればよい．

(1) ベクトル $\boldsymbol{n}_1 = {}^t(-2\,-1\,1)$ は平面 $-2x-y+z=2$ の法線ベクトルであり，ベクトル $\boldsymbol{n}_2 = {}^t(1\,-1\,2)$ は平面 $x-y+2z=-3$ の法線ベクトルである．$(\boldsymbol{n}_1,\,\boldsymbol{n}_2) = 1$, $\|\boldsymbol{n}_1\| = \|\boldsymbol{n}_2\| = \sqrt{6}$ であるので，

$$\cos\theta = \left|\frac{(\boldsymbol{n}_1,\,\boldsymbol{n}_2)}{\|\boldsymbol{n}_1\|\|\boldsymbol{n}_2\|}\right| = \frac{1}{6}$$

である．

（注意）$\dfrac{(\boldsymbol{n}_1,\,\boldsymbol{n}_2)}{\|\boldsymbol{n}_1\|\|\boldsymbol{n}_2\|}$ は 2 つのベクトル $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ のなす角の cos の値を与え，2 つのベクトルのなす角は 0 から π までの範囲に値をとる．一方，2 枚の平面のなす角は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ までの範囲に値をとるので，2 枚の平面のなす角の cos の値としては，上記の解答のように 2 つの法線ベクトルのなす角の cos の値の絶対値を考えればよい．

(2)　ベクトル $\boldsymbol{n}_1 = {}^t\!(2\ -3\ -1)$ は平面 $2x - 3y - z = -1$ の法線ベクトルであり，ベクトル $\boldsymbol{n}_2 = {}^t\!(1\,1\,1)$ は平面 $x + y + z = 1$ の法線ベクトルである．$(\boldsymbol{n}_1,\,\boldsymbol{n}_2) = -2$, $\|\boldsymbol{n}_1\| = \sqrt{14}$, $\|\boldsymbol{n}_2\| = \sqrt{3}$ であるので，

$$\cos\theta = \left|\frac{(\boldsymbol{n}_1,\,\boldsymbol{n}_2)}{\|\boldsymbol{n}_1\|\|\boldsymbol{n}_2\|}\right| = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

である．

1.2.3

求める平面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直であるので，$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と考えればよい．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = {}^t\!(9\,12\,9) = 3\,{}^t\!(3\,4\,3)$ であるので，求める平面の方程式は

$$3(x+3) + 4(y-1) + 3(z-2) = 0, \quad \text{すなわち，} \quad 3x + 4y + 3z = 1$$

である．この平面の方程式において，$x = 4s$, $y = 4t$ とおくと，$y = -3s - 3t + \dfrac{1}{4}$ である．よって，媒介変数 s, t による平面のベクトル表示として，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る．

（注意）座標空間内の 3 点 A, B, C を通る平面のベクトル表示として，

$$\boldsymbol{x} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

を考えてもよい．問題 **1.2.3** の場合，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = {}^t\!(5\ -3\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = {}^t\!(3\,0\ -3) = 3\,{}^t\!(1\,0\ -1)$ であるので，この平面のベクトル表示として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

などでもよい．

1.3.1

両辺の対応する成分を比較して，

$$\begin{cases} x - 1 = -y + 1 \\ xy = -3 \\ 2y + 1 = -2x + 5 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

を満たさなければならない．この連立方程式を解くと，$x = 3, y = -1$ であることがわかる．

1.3.2

行列の和（差），および，スカラー倍に関しては，通常の数における和・差・積と同じ基本性質が成り立つので，通常の数における 1 次式の式変形と同様にして，等式 $2A+3(X-B) = 2(Y-A)$ から等式 $3X - 2Y = -4A + 3B$ を得る．同様に，等式 $A + B - 2(X + A) = -3Y + 2B$ から等式 $-2X + 3Y = A + B$ を得る．

$$\begin{cases} 3X - 2Y = -4A + 3B \\ -2X + 3Y = A + B \end{cases}$$

であるので，$X = -2A + \dfrac{11}{5}B, Y = -A + \dfrac{9}{5}B$ である．よって，

$$X = -2A + \frac{11}{5}B = -2\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{11}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{41}{5} & \dfrac{37}{5} \\ \dfrac{13}{5} & \dfrac{34}{5} \end{pmatrix}$$

$$Y = -A + \frac{9}{5}B = -\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{24}{5} & \dfrac{8}{5} \\ \dfrac{17}{5} & \dfrac{31}{5} \end{pmatrix}$$

1.3.3

(1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) & 2\cdot 5 + (-1)\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 5 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 \\ 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

(3) $AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2 & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 2 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 1 & 1\cdot 0 + 3\cdot 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(4) B の列の個数と D の行の個数が一致しないので，積 BD は定義されない．

(5) $DC + 2F = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (-2)\cdot 3 + 2\cdot 2 & (-2)\cdot(-1) + 2\cdot 1 & (-2)\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 2 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 1 & 1\cdot 0 + 3\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 9 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 13 & 10 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) $-2A+CD=-2\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\1&3\\1&-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-4&2\\-2&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot(-2)+(-1)\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot2+(-1)\cdot3+0\cdot(-1)\\ 2\cdot(-2)+1\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot2+1\cdot3+1\cdot(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4&2\\-2&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7&3\\-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11&5\\-4&0\end{pmatrix}$$

(7) 積 DA は定義されて 3×2 型行列となるが，$-3C$ は 2×3 型行列であるため，この 2 つの行列の和が定義されない．

(8) $F^2=\begin{pmatrix}0&-3&1\\2&4&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-3&1\\2&4&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot0+(-3)\cdot2+1\cdot(-1) & 0\cdot(-3)+(-3)\cdot4+1\cdot(-2) & 0\cdot1+(-3)\cdot0+1\cdot1\\ 2\cdot0+4\cdot2+0\cdot(-1) & 2\cdot(-3)+4\cdot4+0\cdot(-2) & 2\cdot1+4\cdot0+0\cdot1\\ (-1)\cdot0+(-2)\cdot2+1\cdot(-1) & (-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot4+1\cdot(-2) & (-1)\cdot1+(-2)\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7&-14&1\\8&10&2\\-5&-7&0\end{pmatrix}$$

(9) $A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-5)+(-1)\cdot1\\1\cdot(-5)+3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\-2\end{pmatrix}$

(10) $F\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0&-3&1\\2&4&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot2+(-3)\cdot3+1\cdot(-1)\\2\cdot2+4\cdot3+0\cdot(-1)\\(-1)\cdot2+(-2)\cdot3+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\16\\-9\end{pmatrix}$

1.3.3

2 次正方行列 A, B, C をそれぞれ $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$ とおく．

(i) の証明:$(A+B)+C=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_{11}+b_{11})+c_{11}&(a_{12}+b_{12})+c_{12}\\(a_{21}+b_{21})+c_{21}&(a_{22}+b_{22})+c_{22}\end{pmatrix}$

同様に，$A+(B+C)=\begin{pmatrix}a_{11}+(b_{11}+c_{11})&a_{12}+(b_{12}+c_{12})\\a_{21}+(b_{21}+c_{21})&a_{22}+(b_{22}+c_{22})\end{pmatrix}$ ここで，各 i, j $(i, j=1, 2)$ について，$(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ が成立する．よって，両辺の行列の型が一致し，かつ，両辺の対応する成分が等しいので，$(A+B)+C=A+(B+C)$ である．

(ii) の証明：$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$

同様に，$B+A=\begin{pmatrix}b_{11}+a_{11}&b_{12}+a_{12}\\b_{21}+a_{21}&b_{22}+a_{22}\end{pmatrix}$ ここで，各 i, j $(i, j=1, 2)$ について，$a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ が成立する．よって，両辺の行列の型が一致し，かつ，両辺の対応

する成分が等しいので，$A+B=B+A$ である．

(iii) の証明:$A+O=\begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=A$ である．同様に，$O+A=A$ であることもわかる．よって，$A+O=O+A=A$ である．

1.3.5

2 次正方行列 A, B, C をそれぞれ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ とおく．

(iii) の証明：$(A+B)C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})c_{11}+(a_{12}+b_{12})c_{21} & (a_{11}+b_{11})c_{12}+(a_{12}+b_{12})c_{22} \\ (a_{21}+b_{21})c_{11}+(a_{22}+b_{22})c_{21} & (a_{21}+b_{21})c_{12}+(a_{22}+b_{22})c_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21})+(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}) & (a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22})+(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}) \\ (a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21})+(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & (a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22})+(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22} \end{pmatrix}=AC+BC$$

同様に，

$A(B+C)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}+c_{11})+a_{12}(b_{21}+c_{21}) & a_{11}(b_{12}+c_{12})+a_{12}(b_{22}+c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}+c_{11})+a_{22}(b_{21}+c_{21}) & a_{21}(b_{12})+c_{12})+a_{22}(b_{22}+c_{22}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+(a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})+(a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})+(a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})+(a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22} \end{pmatrix}=AB+AC$$

(v) の証明：$(AB)C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{11}+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{12}+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{11}+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{12}+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{22} \end{pmatrix}$$

同様に，$A(BC)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{12}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22})+a_{12}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{22}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22})+a_{22}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \end{pmatrix}$$

ここで，左辺 $(AB)C$ の (i, j) 成分は $(a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21})c_{1j}+(a_{i1}b_{12}+a_{i2}b_{22})c_{2j}$ である．

一方，右辺の $A(BC)$ の (i, j) 成分は $a_{i1}(b_{11}c_{1j}+b_{12}c_{2j})+a_{i2}(b_{21}c_{1j}+b_{22}c_{2j})$ である．

$(a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21})c_{1j}+(a_{i1}b_{12}+a_{i2}b_{22})c_{2j}=a_{i1}b_{11}c_{1j}+a_{i2}b_{21}c_{1j}+a_{i1}b_{12}c_{2j}+a_{i2}b_{22}c_{2j}=(a_{i1}b_{11}c_{1j}+a_{i1}b_{12}c_{2j})+(a_{i2}b_{21}c_{1j}+a_{i2}b_{22}c_{2j})=a_{i1}(b_{11}c_{1j}+b_{12}c_{2j})+a_{i2}(b_{21}c_{1j}+b_{22}c_{2j})$

であるので，左辺 $(AB)C$ の (i, j) 成分と右辺の $A(BC)$ の (i, j) 成分が一致する．

よって，両辺の行列の型が一致し，かつ，両辺の対応する成分が等しいので，$(AB)C = A(BC)$ である．

1.3.6

(1) 分配法則を用いると，$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$ であることがわかる．ここで，条件 $AB = BA$ を適用すると，$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 + O - B^2 = A^2 - B^2$

(2) 同様に分配法則を用いると，

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= ((A+B)(A+B))(A+B) = (A^2 + AB + BA + B^2)(A+B)\\ &= A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3\end{aligned}$$

更に，条件 $AB = BA$ 及び，結合律により，$ABA = A(BA) = A(AB) = A^2B$, $BA^2 = (BA)A = (AB)A = A(BA) = A(AB) = A^2B$, $BAB = (BA)B = (AB)A = A(BA) = A(AB) = A^2B$, $B^2A = B(BA) = B(AB) = (BA)B = (AB)B = AB^2$ である．よって，

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3\\ &= A^3 + A^2B + A^2B + AB^2 + A^2B + AB^2 + AB^2 + B^3\\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3\end{aligned}$$

1.3.7

$$\begin{aligned}A_1 + A_2 + \cdots + A_n &= \begin{pmatrix} 2 + 5 + \cdots + (3n-1) & 3 - 6 + \cdots + 3\cdot(-2)^{n-1} \\ 1 + 1 + \cdots + 1 & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}(3k-1) & \sum_{k=1}^{n} 3\cdot(-2)^{n-1} \\ \sum_{k=1}^{n} 1 & \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3\cdot(-2)^{k-1} = 1 - (-2)^n$,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n}{n+1}$ であるので，

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \begin{pmatrix} \dfrac{n(3n+1)}{2} & 1 - (-2)^n \\ n & \dfrac{n}{n+1} \end{pmatrix}$$ である．

1.3.8

(1) 加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) 数学的帰納法により証明する．

$n = 1$ のときは，明らかに成立する．

$n=k$ のとき成立すると仮定する．すなわち，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで，(1) の結果を利用すると，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k\theta+\theta) & -\sin(k\theta+\theta) \\ \sin(k\theta+\theta) & \cos(k\theta+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する．以上により，全ての自然数 n に対して，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ が成立する．

1.3.9

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，

$$\begin{aligned} A^2-(a+d)A+(ad-bc)E &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & d^2+ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3.10

(1) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ について，ケーリー・ハミルトンの定理により，$A^2 - (1+2)A + (1\cdot 2 - (-1)\cdot(-2))E = O$ すなわち，

$$A^2 - 3A = O$$

である．$A^2=3A$ であるので，$n \geqq 2$ に対して，

$$\begin{aligned}
A^n &= A^2A^{n-2} = (3A)A^{n-2} = 3A^2A^{n-3} = 3(3A)A^{n-3} = 3^2A^{n-2}\\
&= \cdots = 3^kA^{n-k} = \cdots\\
&= 3^{n-2}A^2 = 3^{n-2}(3A) = 3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3^{n-1} & -3^{n-1}\\ -2\cdot 3^{n-1} & 2\cdot 3^{n-1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．また，これは $n=1$ のときも成立する．よって，$A^n = \begin{pmatrix}3^{n-1} & -3^{n-1}\\ -2\cdot 3^{n-1} & 2\cdot 3^{n-1}\end{pmatrix}$ である．

(2)　（解法その 1）2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ について，ケーリー・ハミルトンの定理により，$A^2-(1-2)A+(1\cdot(-2)-4\cdot 1)E=O$ すなわち，

$$A^2+A-6E=O$$

である．

　x^n $(n \geqq 2)$ を 2 次式 x^2+x-6 で割ったときの余りは高々1 次式であるので，その商を $Q(x)$ とし余りを $ax+b$ （ただし，a, b は定数）とおくと，

$$\begin{aligned}
x^n &= (x^2+x-6)Q(x)+ax+b\\
&= (x+3)(x-2)Q(x)+ax+b
\end{aligned}$$

が成立する．よって，

$$\begin{cases}(-3)^n = -3a+b\\ 2^n = 2a+b\end{cases}$$

である．よって，$a=\dfrac{2^n-(-3)^n}{5}$, $b=\dfrac{3\cdot 2^n+2\cdot(-3)^n}{5}$ である．すなわち，

$$x^n = (x^2+x-6)Q(x)+\frac{2^n-(-3)^n}{5}x+\frac{3\cdot 2^n+2\cdot(-3)^n}{5}$$

である．

　一般に，A^k と A^ℓ は積に関して可換であり，A^k と E も積に関して可換である．このことに注意すると，

$$A^n = (A^2+A-6E)Q(A)+\frac{2^n-(-3)^n}{5}A+\frac{3\cdot 2^n+2\cdot(-3)^n}{5}E$$

が成立する．ここで，$Q(A)$ は，多項式 $Q(x)$ について，形式的に x に A を代入し，また，$Q(x)$ の定数項 c を行列 cE で置き換えたものである．

$$\begin{aligned}
A^n &= (A^2 + A - 6E)Q(A) + \frac{2^n - (-3)^n}{5}A + \frac{3\cdot 2^n + 2\cdot(-3)^n}{5}E \\
&= OQ(A) + \frac{2^n - (-3)^n}{5}A + \frac{3\cdot 2^n + 2\cdot(-3)^n}{5}E \\
&= \frac{2^n - (-3)^n}{5}A + \frac{3\cdot 2^n + 2\cdot(-3)^n}{5}E \\
&= \frac{2^n - (-3)^n}{5}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \frac{3\cdot 2^n + 2\cdot(-3)^n}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{2^{n+2} + (-3)^n}{5} & \dfrac{2^{n+2} - 4\cdot(-3)^n}{5} \\ \dfrac{2^n - (-3)^n}{5} & \dfrac{2^n + 4\cdot(-3)^n}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立する．よって，

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{2^{n+2} + (-3)^n}{5} & \dfrac{2^{n+2} - 4\cdot(-3)^n}{5} \\ \\ \dfrac{2^n - (-3)^n}{5} & \dfrac{2^n + 4\cdot(-3)^n}{5} \end{pmatrix}$$

（解法その 2）ケーリー・ハミルトンの定理により，$A^2 + A - 6E = O$ すなわち，

$$A^2 = -A + 6E$$

である．

$$\begin{aligned}
A^3 &= AA^2 = A(-A + 6E) = -A^2 + 6A = -(-A + 6E) + 6A = 7A - 6E \\
A^4 &= AA^3 = A(7A - 6E) = 7A^2 - 6A = 7(-A + 6E) - 6A = -13A + 42E
\end{aligned}$$

のように，関係式 $A^2 = -A + 6E$ を用いて A のべき乗の指数を下げていくことにより，$A^n = a_nA + b_nE$ の形にすることができる．

$$A^{n+1} = AA^n = A(a_nA + b_nE) = a_nA^2 + b_nA = a_n(-A + 6E) + b_nA = (-a_n + b_n)A + 6a_nE$$

であるので，

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + b_n \\ b_{n+1} = 6a_n \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = -1 \\ b_1 = 0,\ b_2 = 6 \end{cases}$$

である．よって，数列 $\{a_n\}$ は 3 項間漸化式 $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0\ (n \geqq 1)$ を満たす．特性方程式 $t^2 + t - 6 = 0$ の解は $t = -3,\ 2$ であるから，

$$\begin{aligned}
a_{n+2} + 3a_{n+1} &= 2(a_{n+1} + 3a_n) \\
a_{n+2} - 2a_{n+1} &= -3(a_{n+1} - 2a_n)
\end{aligned}$$

を成立する．このとき，数列 $\{a_{n+1}+3a_n\}$ は初項 $a_2+3a_1=2$，公比 2 の等比数列であるので，$a_{n+1}+3a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ である．また，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=-3$，公比 -3 の等比数列であるので，$a_{n+1}-2a_n=-3\cdot(-3)2^{n-1}=(-3)^n$ である．よって，次を満たす.

$$\begin{cases} a_{n+1}+3a_n=2^n \\ a_{n+1}-2a_n=(-3)^n \end{cases}$$

したがって，

$$a_n=\frac{2^n-(-3)^n}{5}$$
$$b_n=a_{n+1}+a_n=\frac{3\cdot 2^n+2\cdot(-3)^n}{5}$$

である.
以上により，

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{2^n-(-3)^n}{5}A+\frac{3\cdot 2^n+2\cdot(-3)^n}{5}E \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2^{n+2}+(-3)^n}{5} & \dfrac{2^{n+2}-4\cdot(-3)^n}{5} \\ \dfrac{2^n-(-3)^n}{5} & \dfrac{2^n+4\cdot(-3)^n}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成立する．よって，

$$A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{2^{n+2}+(-3)^n}{5} & \dfrac{2^{n+2}-4\cdot(-3)^n}{5} \\ \\ \dfrac{2^n-(-3)^n}{5} & \dfrac{2^n+4\cdot(-3)^n}{5} \end{pmatrix}$$

1.3.11

(1) $$A^2=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$
$$A^k=O \quad (k\geqq 3)$$

(2) A^k と A^ℓ は積に関して可換であり，A^k と E も積に関して可換であるので，二項定理により，

$$\begin{aligned} B^n &= (E+A)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E^{n-k}A^k \\ &= \binom{n}{0}E^n+\binom{n}{1}E^{n-1}A+\binom{n}{2}E^{n-2}A^2+\binom{n}{3}E^{n-3}A^3+\binom{n}{4}E^{n-4}A^4+\cdots+\binom{n}{n}A^n \end{aligned}$$

である．ここで，$\binom{n}{k}$ は二項係数である．$n \geqq 3$ であるとき，$A^k = O$ $(k \geqq 3)$ であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
B^n &= \binom{n}{0}E^n + \binom{n}{1}E^{n-1}A + \binom{n}{2}E^{n-2}A^2 \\
&= E + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \frac{n(n-1)}{a}^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これは $n = 1$ のときも成立する．よって，

$$
B^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \frac{n(n-1)}{a}^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

1.4.1

(1)　与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ である．これを行基本変形により変形する．

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[①+②\times(-2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[①\leftrightarrow②]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow[②\times(-1/5)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[①+②\times(-3)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)
$$

よって，問題の連立 1 次方程式は，変形後の行列が表す連立 1 次方程式

$$
\begin{cases} x \qquad - z = 1 \\ \qquad y + z = -1 \end{cases}
$$

と同じ解をもつ．これは座標空間内の 2 枚の平面の交わりを表し，その解の全体は直線となる．この直線上の点は，任意定数 t を用いて $z = t$ とおくことにより，

$$
\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = t \end{cases}
$$

と表される．よって，求めるべき解ベクトルとしての一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(ただし，}t\text{ は任意定数)}$$

(2) 与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ である．これを行基本変形により変形する．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[①+②\times 1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[①\times(-1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -3 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[②+①\times(-2)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

最後の行列の第 2 行に対応する 1 次方程式は $0x+0y+0z=-7$ であり，どのような x, y, z もこの方程式を満たさない．よって，この連立 1 次方程式は解をもたない．

1.4.2

(1) 与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & -9 & 5 \\ 3 & -1 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ である．これを行基本変形により変形する．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & -9 & 5 \\ 3 & -1 & -11 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②+①\times(-2) \\ ③+①\times(-3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①+②\times 1 \\ ③+②\times(-2)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって，問題の連立 1 次方程式は次の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} - 2z = 1 \\ \phantom{x+{}} y + 5z = -3 \end{cases}$$

と同じ解をもつ．これは座標空間内の 2 枚の平面の交わりを表し，その解の全体は直線となる．この直線上の点は，任意定数 t を用いて $z=t$ とおくことにより，

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -5t-3 \\ z = t \end{cases}$$

と表される．よって，求めるべき解ベクトルとしての一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(ただし，}t\text{ は任意定数)}$$

(2) 与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & -7 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ である．これを行基本変形により変形する．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & -7 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②+①\times 2 \\ ③+①\times(-2)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[③+②\times(-1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

最後の行列の第 3 行に対応する 1 次方程式は $0x+0y+0z=-2$ であり，どのような x, y, z もこの方程式を満たさない．よって，この連立 1 次方程式は解をもたない．

(3) 与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & -10 & -5 & -10 \\ 3 & -6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ である．これを行基本変形により変形する．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & -10 & -5 & -10 \\ 3 & -6 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①\times(-1/2) \\ ②\times(1/5) \\ ③\times(1/3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②+①\times(-1) \\ ③+①\times(-1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって，問題の連立 1 次方程式は 1 次方程式 $x-2y-z=-2$ と同じ解をもつ．これは座標空間内の平面を表し，この平面上の点は任意定数 s, t を用いて $y=s$, $z=t$ とおくことにより，

$$\begin{cases} x = 2s+t-2 \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

と表される．よって，求めるべき解ベクトルとしての一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし，} s,\ t \text{ は任意定数})$$

1.5.1

2 次正方行列の行列式，3 次正方行列の行列式の定義に従って計算すればよい．ただし，3 次正方行列の行列式の場合，第 2 章で学習する行・列の基本変形に関する行列式の基本的な性質を利用することにより，より速く容易に計算することができる．

(1) $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 8\cdot 3-(-2)\cdot(-4) = 16$

(2) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 5\cdot(-7)-6\cdot 3 = -53$

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3{\cdot}5{\cdot}3+0{\cdot}(-1){\cdot}7+(-4){\cdot}1{\cdot}(-2)-(-4){\cdot}5{\cdot}7-0{\cdot}1{\cdot}3-3{\cdot}(-1){\cdot}(-2) = 187$

(4) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = (-2){\cdot}1{\cdot}(-3)+5{\cdot}(-4){\cdot}6+2{\cdot}3{\cdot}7-2{\cdot}1{\cdot}6-5{\cdot}3{\cdot}(-3)-(-2){\cdot}(-4){\cdot}7 = -95$

1.5.2

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とし，$A = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ であるので，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{c}) &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (-a_1b_3 + a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= (a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3) - (a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3) \\ &= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 \\ &= \det(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

（注意）$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{c}) &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (-a_1b_3 + a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$

であり，これは行列式 $|A| = \det(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$ の第 3 列に関する余因子展開に他ならない．

1.5.3

(1) A が正則行列であるので，A は逆行列 A^{-1} をもつ．等式 $BA = CA$ の両辺に右から A^{-1} をかけると，

$$(BA)A^{-1} = (CA)A^{-1}$$

が成立する．ここで，

左辺 $= B(AA^{-1}) = BE = B$

右辺 $= C(AA^{-1}) = CE = C$

であるので，$B = C$ が成立する．

(2) A が正則行列であるので，A は逆行列 A^{-1} をもつ．等式 $XA = B$ の両辺に右から A^{-1} をかけると，

$$(XA)A^{-1} = BA^{-1}$$

が成立する．ここで，左辺 $= X(AA^{-1}) = XE = X$ であるので，$X = BA^{-1}$ が成立する．

1.5.4

(1)　A, B が正則行列であると仮定する．このとき，等式 $AB = O$ の両辺に左から A の逆行列 A^{-1} をかけると，

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}O$$

となる．ここで，左辺 $= (A^{-1}A)B = EB = B$ であり，右辺 $= O$ であるので，$B = O$ である．一方，B が正則行列であるので，$BB^{-1} = E$ をみたす行列 B^{-1} が存在する．しかしながら，$B = O$ であるので，$BB^{-1} = OB^{-1} = O$ である．よって，不合理なことが成立したので，A, B 両方とも正則行列であることはない．

(2)　2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$|A| = ad - bc = 0$ であるならば，ケーリー・ハミルトンの定理により，

$$A^2 - (a+d)A = O$$

すなわち，$A^2 = (a+d)A$ が成立する．仮に A が正則であるとして，A の逆行列 A^{-1} を $A^2 = (a+d)A$ の左からかけると，

$$A = (a+d)E = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$$

を得る．よって，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$$

となる．したがって，$a = b = c = d = 0$ でなければならない．すなわち，$A = O$ である．しかしながら，零行列 O について，明らかに $OX = XO = E$ をみたす行列 X は存在しないので，$A = O$ は正則行列ではない．矛盾．

1.5.5

正方行列 A が正則，すなわち，逆行列をもつための必要十分条件は，A の行列式 $|A|$ が $|A| \neq 0$ を満たすことである．

(1)　$\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -6 \end{vmatrix} = 0$ であるので，この行列は正則ではない．

(2)　$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ であるので，この行列は正則である．また，その逆行列は

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(3)　$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ であるので，この行列は正則である．また，その逆行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

1.5.6
正方行列 A の逆行列とは，$AX = E$ かつ $XA = E$ を満たす正方行列 X のことである．
（注意）定義上は「$AX = E$，$XA = E$」の両方の等号が満たされることが必要であるが，一方の等号が満たされれば，もう一方の等号が成立することがわかっている．(教科書　系 2.3.5) したがって，逆行列を求める際は，一方の等号を満たす行列を求めればよい．

(1)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，$AX = E$ を満たす X を $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix}$ とおく．

$AX = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ p-s & q-t & r-u \\ p+2s & q+2t & r+2u \end{pmatrix}$ であるので，$AX = E$ より，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x = 1, & 2y = 0, & 2z = 0, \\ p - s = 0 & q - t = 1, & r - u = 0, \\ p + 2s = 0, & q + 2t = 0, & r + 2u = 1 \end{cases}$$

を満たす．これを解いて，

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

を得る．これは $XA = E$ も満たし，上記の X は A の逆行列である．

（注意）この問題の行列 A のような行列の場合，第 2 章で学習する「行列の分割」とその演算計算への応用を利用することもできる．$A = \begin{pmatrix} 2 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{pmatrix}$ の形であるので，$X = \begin{pmatrix} x & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_{22} \end{pmatrix}$ とおくと，

$$AX = \begin{pmatrix} 2x & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}X_{22} \end{pmatrix}$$

である．$AX = E$ を満たすとき，$2x = 1$, $A_{22}X_{22} = E_2$ である．このとき，

$$\begin{aligned} X_{22} = A_{22}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるので，$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ である．

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ について，$BX = E$ を満たす X を $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix}$ とおく．
$BX = \begin{pmatrix} x & y & z \\ -x+2p & -y+2q & -z+2r \\ x+p-2s & y+q-2t & z+r-2u \end{pmatrix}$ であるので，$BX = E$ より，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x = 1, & y = 0, & z = 0, \\ -x+2p = 0 & -y+2q = 1, & -z+2r = 0, \\ x+p-2s = 0, & y+q-2t = 0, & z+r-2u = 1 \end{cases}$$

を満たす．これを解いて，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

を得る．これは $XB = E$ も満たし，上記の X は B の逆行列である．

1.5.7
正方行列 A が正則行列であるための必要十分条件は，その行列式 $|A|$ が $|A| \neq 0$ であることである．
(1) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = x^2 - 3$ であるから，問題の行列が正則行列であるための必要十分条件は $x^2 - 3 \neq 0$，すなわち，$x \neq \pm\sqrt{3}$ である．
(2) $\begin{vmatrix} 2x+1 & x-7 \\ x & x-3 \end{vmatrix} = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ であるから，問題の行列が正則行列であるための必要十分条件は $(x+3)(x-1) \neq 0$，すなわち，$x \neq -3, 1$ である．

1.5.8
(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式は $|A| = 5 \neq 0$ であるので，A は正則行列であり，その逆行

列は $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ である．このとき，求める X は

$$
\begin{aligned}
X &= A^{-1}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 16 & -15 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(2)　$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ の行列式は $|B| = 1 \neq 0$ であるので，B は正則行列であり，その逆行列は $B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ である．このとき，求める X は

$$
\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1.5.9

(1)　P の行列式は $|P| = -5 \neq 0$ であるので，P は正則であり逆行列は

$$
P^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}
$$

である．

(2)　$P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2)　例題 1.5.1(2) により，$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ である．この等式に左から P を，右から P^{-1} をかけると，

$$
\begin{aligned}
A^n &= P(P^{-1}AP)^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2\cdot(-3)^n + 7\cdot 2^n & -7\cdot(-3)^n + 7\cdot 2^n \\ 2\cdot(-3)^n - 2^{n+1} & 7\cdot(-3)^n - 2^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

（注意）(1), (2) の計算は，第 4 章で学習する「行列の対角化」である.「行列の対角化」では，与えられた行列 A に対して P を求める考え方，及び，その方法を学習する．

1.6.1
座標平面における y 軸に関する対称変換は $(x,\, y) \mapsto (x',\, y') = (-x,\, y)$ であるので，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である．よって，y 軸に関する対称変換を表す行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．
原点 O に関する点対称変換は $(x,\, y) \mapsto (x',\, y') = (-x,\, -y)$ であるので，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である．よって，原点 O に関する点対称変換を表す行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．

1.6.2
座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\, y)$ が直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する対称変換で移された点を $\mathrm{Q}(x',\, y')$ とする．このとき，直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ は線分 PQ の垂直二等分線であることから，次の 2 つが成立する：

①：$\dfrac{y'-y}{x'-x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -1$，すなわち，$y' - y = -\sqrt{3}(x'-x)$

②：$\dfrac{y'+y}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{x'+x}{2}$，すなわち，$\sqrt{3}(y'+y) = x'+x$

よって，

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\[2ex] y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

である．すなわち，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である．したがって，求める対称変換を表す行列は $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ である．

（注意）直線 ℓ ： $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ と x 軸（の正の向き）とのなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であることに注意すると，直線 ℓ に関する対称変換を次の 3 つの変換の合成と考えることができ，それを利用して対称変換を表す行列を求めることができる：

① : 原点のまわりの $-\dfrac{\pi}{6}$ 回転により，直線 ℓ を x 軸へ移す.
② : x 軸に関する対称変換を行う.
③ : 原点のまわりの $\dfrac{\pi}{6}$ 回転により，x 軸を直線 ℓ へ移す.

① の変換を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) & \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

② の変換を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

③ の変換を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

3 つの変換 ①, ②, ③ の合成を表す行列は，それぞれの変換を表す行列の積として与えられるので，積の順序に注意すると，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

が求める直線 ℓ を表す行列である.

1.6.3

(1) $A = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ であるので，原点のまわりの $\dfrac{\pi}{3}$ 回転である.

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ であるので，

$$A^6 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{6\pi}{3} & -\sin\dfrac{6\pi}{3} \\ \sin\dfrac{6\pi}{3} & \cos\dfrac{6\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

である．$B = A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$ とおくと，$A^6 = E$ により，

$$B = A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + E$$

である．このとき，

$$\begin{aligned} AB &= A(A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + E) = A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 + A \\ &= A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + E + A = A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + E \\ &= B \end{aligned}$$

である．よって，$AB = B$，すなわち，

$$(A - E)B = O$$

である．一方，

$$A - E = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であるので，その行列式 $|A - E| = 1 \neq 0$ であり，$A - E$ は正則である．
よって，等式 $(A - B)B = O$ の両辺に左から逆行列 $(A - E)^{-1}$ をかけることにより，

$$B = (A - E)^{-1}(A - E)B = (A - E)^{-1}O = O$$

を得る．すなわち，

$$A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 = O$$

である．

（注意）A が原点のまわりの $\dfrac{\pi}{3}$ 回転であることに注意すると，

$$A^3 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{3\pi}{3} & -\sin\dfrac{3\pi}{3} \\ \sin\dfrac{3\pi}{3} & \cos\dfrac{3\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

である．よって，$A^3 = -E$ である．一方，

$$\begin{aligned} A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 &= (A + A^2 + A^3) + (A^4 + A^5 + A^6) \\ &= (A + A^2 + A^3) + A^3(A + A^2 + A^3) \\ &= E(A + A^2 + A^3) + A^3(A + A^2 + A^3) \\ &= (E + A^3)(A + A^2 + A^3) \end{aligned}$$

である．$E + A^3 = O$ であるので，

$$A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 = O(A + A^2 + A^3) = O$$

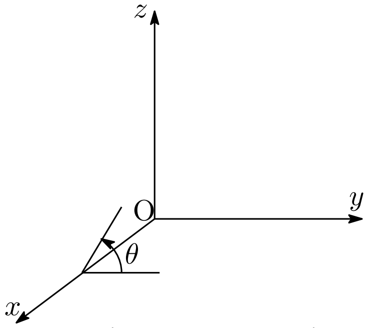
である．

1.6.4
座標空間における 原点に関する点対称変換は $(x,\, y,\, z) \mapsto (x',\, y',\, z') = (-x,\, -y,\, -z)$ であるので，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

である．よって，原点に関する点対称変換を表す行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．

1.6.5
座標空間における，x 軸のまわりの θ-回転による変換では，点の x 座標を変えずに，$y,\, z$ 座標を座標 $(y,\, z)$ 平面における原点のまわりの θ-回転として変換する．よって，変換 $(x,\, y,\, z) \mapsto (x',\, y',\, z')$ は



x 軸まわりの θ-回転

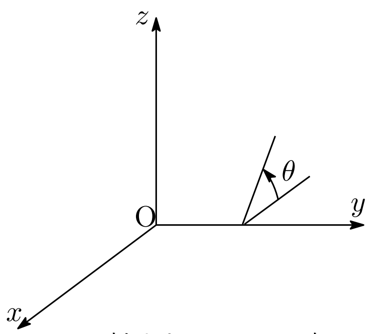
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\theta - z\sin\theta \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

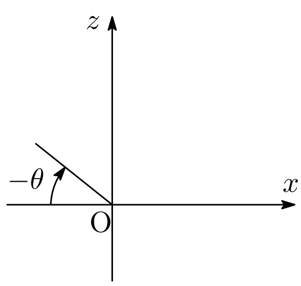
で与えられる．すなわち，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

よって，求める x 軸のまわりの θ-回転を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である．

座標空間における，y 軸のまわりの θ-回転による変換では，点の y 座標を変えずに，$x,\, z$ 座標を座標 $(x,\, z)$ 平面における原点のまわりの $(-\theta)$-回転として変換する．よって，変換





y 軸まわりの θ-回転

$(x,\, y,\, z) \mapsto (x',\, y',\, z')$ は

$$\begin{cases} x' = x\cos(-\theta) - z\sin(-\theta) \\ y' = y \\ z' = x\sin(-\theta) + z\cos(-\theta) \end{cases}$$

で与えられる．すなわち，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & 0 & -\sin(-\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\theta) & 0 & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

よって，求める x 軸のまわりの θ-回転を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ である．

1.6.6
座標平面上の直線 ℓ のベクトル方程式を

$$\ell \;:\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$$

とする．ここで，$\boldsymbol{v}$ は直線 ℓ の方向ベクトルである．2 次正則行列 A による線形変換 f_A により，直線 ℓ 上の任意の点 $\boldsymbol{x}(t)$ は

$$\begin{aligned} f_A(\boldsymbol{x}(t)) &= A\boldsymbol{x}(t) = A(t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}) \\ &= tA\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

へと移される．A が正則行列であるので，$A\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である．ベクトル $A\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとし，ベクトル $A\boldsymbol{a}$ を位置ベクトルとする点を通る直線を m とすると，直線 m のベクトル方程式は

$$m \;:\; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = tA\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{a}$$

で与えられる．よって，直線 ℓ 上の任意の点は直線 m 上に移される．
逆に，直線 m 上の任意の点 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ に対して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= tA\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{a} = A(t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}) \\ &= f_A(t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

であるので，$\boldsymbol{y}$ は直線 ℓ 上の点 $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$ が線形変換 f_A により移された点である．
したがって，2 次正則行列 A による線形変換 f_A により，座標平面上の直線は座標平面上の直線へ移される．

2 次正方行列 A が正則行列でない場合，直線 $\ell \;:\; \boldsymbol{x} = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$ に対して，次の 2 つの場合が起こりうる：
(i) $A\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ の場合

(ii) $A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ の場合

(i) の場合：A が正則行列である場合と同様に，直線 ℓ は直線に移される．
(ii) の場合[1]：この場合，直線 ℓ 上の任意の点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ に対して，

$$\begin{aligned} f_A(\boldsymbol{x}(t)) &= A\boldsymbol{x}(t) = tA\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{0} + A\boldsymbol{a} \\ &= A\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

であるので，直線 ℓ 上の点はすべて，$A\boldsymbol{a}$ を位置ベクトルとする 1 点へ移される．
したがって，行列 A が正則でない場合，座標平面上の直線は直線へ移されるか，そうでない場合は 1 点に移される（「1 点につぶれる」）．

1.6.7
1.6.6 と同様の議論により，3 次正則行列 A で表される線形変換 f_A により，座標空間内の直線は直線へ移されることがわかる．

座標空間内の平面 α のベクトル方程式を

$$\alpha \ : \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$$

とする．ここで，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は平行ではないベクトルである．3 次正則行列 A による線形変換 f_A により，平面 α 上の任意の点 $\boldsymbol{x}(t)$ は

$$\begin{aligned} f_A(\boldsymbol{x}(t)) &= A\boldsymbol{x}(t) = A(s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}) \\ &= sA\boldsymbol{u} + tA\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

へと移される．A が正則行列であるので，$A\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ かつ，$A\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である．また，これら 2 つのベクトルは平行ではない．($A\boldsymbol{u} \nparallel A\boldsymbol{v}$)
　なぜなら，$A\boldsymbol{u} \parallel A\boldsymbol{v}$ と仮定する，例えば，$A\boldsymbol{u} = kA\boldsymbol{v}$ を満たすスカラー k が存在したとすると，$A(\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ が成立する．A が正則行列なので，この両辺に左から逆行列 A^{-1} をかけることにより，$\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であることがわかる．しかしながら，このことは，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が平行ではないことに反し，矛盾である．

ベクトル方程式

$$\beta \ : \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = sA\boldsymbol{u} + tA\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{a}$$

で与えられる座標空間内の平面を β とすると，上記の議論により，平面 α 上の任意の点は平面 β 上に移される．
逆に，平面 β 上の任意の点 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ に対して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= sA\boldsymbol{u} + tA\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{a} = A(s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}) \\ &= f_A(s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

であるので，$\boldsymbol{y}$ は平面 α 上の点 $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$ が線形変換 f_A により移された点である．
したがって，3 次正則行列 A による線形変換 f_A により，座標空間内の平面は座標空間内の平面へ移される．

[1]例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たす．実際に，任意の正則ではない行列 A に対して，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{v}(\neq \boldsymbol{0})$ が存在する．