第 6 章

6.1.1

Δ を長方形領域 $D=[a,\,b]\times[c,\,d]$ の任意の分割とし，分割 Δ の各小長方形 D_{ij} 内に点 $\mathrm{P}_{ij}(\xi_{ij},\,\eta_{ij})$ を任意にとる．このとき，定数値関数 f のリーマン有限和 $S(f,\,\Delta,\,\{\mathrm{P}_{ij}\})$ は

$$\begin{aligned}S(f,\,\Delta,\,\{\mathrm{P}_{ij}\}) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij},\,\eta_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})\\ &= k\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) = k\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_{i-1})\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_{j-1})\right)\\ &= k(b-a)(d-c)\end{aligned}$$

よって，分割 Δ および 点列 $\{\mathrm{P}_{ij}\}$ の取り方に依らずに，極限値

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(f,\,\Delta,\,\{\mathrm{P}_{ij}\}) = k(b-a)(d-c)$$

が定まる．したがって，定数値関数 $f(x,\,y)=k$ は長方形領域 $D=[a,\,b]\times[c,\,d]$ で積分可能であり，$\displaystyle\iint_D f(x,\,y)\;dxdy = k(b-a)(d-c)$ である．

6.1.2

1 変数関数の積分の性質とフビニの定理（定理 6.1.5）を用いればよい．具体的には，次のようになる．

(1) $\lambda,\,\mu$ を定数とする．先ず，$f(x,\,y),\,g(x,\,y)$ は $D=[a,\,b]\times[c,\,d]$ 上で連続であるので，関数 $\lambda f(x,\,y)+\mu g(x,\,y)$ もまた D 上で連続であることに注意する．定理 6.1.2 により，関数 $af(x,\,y)+bg(x,\,y)$ もまた D 上で積分可能でる．また，フビニの定理により，$\displaystyle\iint_D(\lambda f(x,\,y)+\mu g(x,\,y))\;dxdy=\int_c^d\left(\int_a^b(\lambda f(x,\,y)+\mu g(x,\,y))\;dx\right)dy$ が成立する．ここで，1 変数関数の積分の性質を使うと，

$$\begin{aligned}\iint_D(\lambda f(x,\,y)+\mu g(x,\,y))\;dxdy &= \int_c^d\left(\int_a^b(\lambda f(x,\,y)+\mu g(x,\,y))\;dx\right)dy\\ &= \int_c^d\left(\lambda\int_a^b f(x,\,y)\;dx+\mu\int_a^b g(x,\,y)\;dx\right)dy\\ &= \lambda\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\,y)\;dx\right)dy+\mu\int_c^d\left(\int_a^b g(x,\,y)\;dx\right)dy\\ &= \lambda\iint_D f(x,\,y)\;dxdy+\mu\iint_D g(x,\,y)\;dxdy\end{aligned}$$

（最後の等号のところで，もう一度，フビニの定理を使用した.）

(2) D においてつねに $f(x,\,y)\leqq g(x,\,y)$ が成立している．このとき，任意の $c\leqq y\leqq d$

に対して，$\displaystyle\int_a^b f(x,\,y)\;dx \leqq \int_a^b g(x,\,y)\;dx$ が成立する．

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,\,y)\;dxdy &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,\,y)\;dx\right)dy \\ &\leqq \int_c^d \left(\int_a^b g(x,\,y)\;dx\right)dy = \iint_D g(x,\,y)\;dxdy\end{aligned}$$

(3) 関数 $f(x,\,y)$ が D 上で連続なので，$|f(x,\,y)|$ も D 上で連続である．よって，定理 6.1.2 により，$|f(x,\,y)|$ も D 上で積分可能である．また，任意の $c \leqq y \leqq d$ に対して，$\displaystyle\left|\int_a^b f(x,\,y)\;dx\right| \leqq \int_a^b |f(x,\,y)|\;dx$ であるので，

$$\begin{aligned}\left|\iint_D f(x,\,y)\;dxdy\right| &= \left|\int_c^d \left(\int_a^b f(x,\,y)\;dx\right)dy\right| \\ &\leqq \int_c^d \left|\int_a^b f(x,\,y)\;dx\right|\;dy \\ &\leqq \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,\,y)|\;dx\right)\;dy = \iint_D |f(x,\,y)|\;dxdy\end{aligned}$$

一般の状況のもとで定理 6.1.3 を証明することはそれ程難しくはないので，ここで，定理 6.1.3 を証明する．

(**定理 6.1.3 の証明**) R を D を含む長方形領域とする．R 上の関数 $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ を

$$\widetilde{f}(x,\,y) = \begin{cases} f(x,\,y) & ((x,\,y) \in D) \\ 0 & ((x,\,y) \notin D) \end{cases}, \quad \widetilde{g}(x,\,y) = \begin{cases} g(x,\,y) & ((x,\,y) \in D) \\ 0 & ((x,\,y) \notin D) \end{cases}$$

とする．また，Δ を長方形領域 R の任意の分割とし，分割 Δ の各小長方形 D_{ij} 内に点 $\mathrm{P}_{ij}(\xi_{ij},\,\eta_{ij})$ を任意にとる．

(1) 分割 Δ と点列 $\{\mathrm{P}_{ij}\}$ に関する $a\widetilde{f}(x,\,y) + b\widetilde{g}(x,\,y)$ のリーマン和は

$$\begin{aligned}S(a\widetilde{f} + b\widetilde{g}, \Delta, \{\mathrm{P}_{ij}\}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a\widetilde{f}(\xi_{ij},\,\eta_{ij}) + b\widetilde{g}(\xi_{ij},\,\eta_{ij}))(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= a\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \widetilde{f}(\xi_{ij},\,\eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &\qquad\qquad + b\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \widetilde{g}(\xi_{ij},\,\eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= aS(\widetilde{f}, \Delta, \{\mathrm{P}_{ij}\}) + bS(\widetilde{g}, \Delta, \{\mathrm{P}_{ij}\})\end{aligned}$$

である．関数 f, g は D 上で積分可能であるので，$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\widetilde{f}, \Delta, \{\mathrm{P}_{ij}\})$，$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\widetilde{g}, \Delta, \{\mathrm{P}_{ij}\})$ は分割 Δ および 点列 $\{\mathrm{P}_{ij}\}$ の取り方に依らずに収束する．よって，$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(a\widetilde{f}+b\widetilde{g}, \Delta, \{\mathrm{P}_{ij}\})$ も分割 Δ および 点列 $\{\mathrm{P}_{ij}\}$ の取り方に依らずに収束し，

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(a\widetilde{f} + b\widetilde{g}, \Delta, \{\mathrm{P}_{ij}\}) = a\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\widetilde{f}, \Delta, \{\mathrm{P}_{ij}\}) + b\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\widetilde{f}, \Delta, \{\mathrm{P}_{ij}\})$$

が成立する．よって，$a\widetilde{f}+b\widetilde{g}$ は長方形領域 R 上で積分可能であり，

$$\iint_R (a\widetilde{f}(x,\,y)+b\widetilde{g}(x,\,y))\;dxdy = a\iint_R \widetilde{f}(x,\,y)\;dxdy + b\iint_R \widetilde{g}(x,\,y)\;dxdy$$

である．したがって，$af(x,\,y)+bg(x,\,y)$ は D 上で積分可能で，

$$\iint_D (af(x,\,y)+bg(x,\,y))\;dxdy = a\iint_D f(x,\,y)\;dxdy + b\iint_D g(x,\,y)\;dxdy$$

が成立する．

(2) D において $f(x,\,y) \leqq g(x,\,y)$ が成立するので，明らかに，R においても $\widetilde{f}(x,\,y) \leqq \widetilde{g}(x,\,y)$ が成立する．このことより，リーマン和について，

$$\begin{aligned} S(\widetilde{f},\Delta,\{\mathrm{P}_{ij}\}) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{f}(\xi_{ij},\,\eta_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) \\ &\leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{g}(\xi_{ij},\,\eta_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) = S(\widetilde{g},\Delta,\{\mathrm{P}_{ij}\}) \end{aligned}$$

が成立する．したがって，両辺の極限を取ることにより，

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,\,y)\;dxdy = \iint_R \widetilde{f}(x,\,y)\;dxdy &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\widetilde{f},\Delta,\{\mathrm{P}_{ij}\}) \\ &\leqq \lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\widetilde{g},\Delta,\{\mathrm{P}_{ij}\}) \\ &= \iint_R \widetilde{g}(x,\,y)\;dxdy = \iint_D g(x,\,y)\;dxdy \end{aligned}$$

(3) 絶対値の三角不等式（教科書 1 ページ）により，

$$\begin{aligned} \left|S(\widetilde{f},\Delta,\{\mathrm{P}_{ij}\})\right| &= \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{f}(\xi_{ij},\,\eta_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})\right| \\ &\leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{f}(\xi_{ij},\,\eta_{ij})|(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) = S(|\widetilde{f}|,\Delta,\{\mathrm{P}_{ij}\}) \end{aligned}$$

が成立する．したがって，両辺の極限を取ることにより，

$$\begin{aligned} \left|\iint_D f(x,\,y)\;dxdy\right| = \left|\iint_R \widetilde{f}(x,\,y)\;dxdy\right| = \left|\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\widetilde{f},\Delta,\{\mathrm{P}_{ij}\})\right| &= \lim_{\|\Delta\|\to 0}\left|S(\widetilde{f},\Delta,\{\mathrm{P}_{ij}\})\right| \\ &\leqq \lim_{\|\Delta\|\to 0} S(|\widetilde{f}|,\Delta,\{\mathrm{P}_{ij}\}) \\ &= \iint_R |\widetilde{f}(x,\,y)|\;dxdy = \iint_D |f(x,\,y)|\;dxdy \end{aligned}$$

(4) $\boldsymbol{R}^2$ の任意の部分集合 A に対して，

$$\chi_A(x,\,y) = \begin{cases} 1 & ((x,\,y)\in A) \\ 0 & ((x,\,y)\notin A) \end{cases}$$

と定めると，$\widetilde{f} = \chi_D f$ である．ここで，$D = D_1 \cup D_2$ であるので，

$$\widetilde{f} = \chi_D f = \chi_{D_1} f + \chi_{D_2} f - \chi_{D_1 \cap D_2} f$$

である．D_1 と D_2 が境界以外で共有点を持たないので，$\displaystyle\iint_{D_1 \cap D_2} f(x,\, y)\ dxdy = 0$ であることを示すことができる．(詳細は割愛して，この事実を認めることとする．) このとき，(1) で示した積分の線形性を適用すると，

$$\begin{aligned}
&\iint_D f(x,\, y)\ dxdy = \iint_R \widetilde{f}(x,\, y)\ dxdy = \iint_R \chi_D f(x,\, y)\ dxdy \\
&= \iint_R (\chi_{D_1} f(x,\, y) + \chi_{D_2} f(x,\, y) - \chi_{D_1 \cap D_2} f(x,\, y))\ dxdy \\
&= \iint_R \chi_{D_1} f(x,\, y)\ dxdy + \iint_R \chi_{D_2} f(x,\, y)\ dxdy - \iint_R \chi_{D_1 \cap D_2} f(x,\, y)\ dxdy \\
&= \iint_{D_1} f(x,\, y)\ dxdy + \iint_{D_2} f(x,\, y)\ dxdy - \iint_{D_1 \cap D_2} f(x,\, y))\ dxdy \\
&= \iint_{D_1} f(x,\, y)\ dxdy + \iint_{D_2} f(x,\, y)\ dxdy
\end{aligned}$$

6.1.3

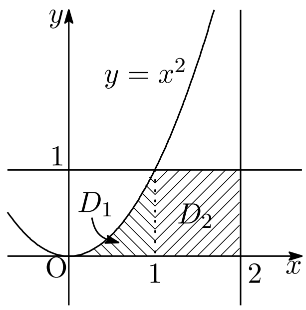
先ず，任意の x $(a \leqq x \leqq b)$ に対して，$\displaystyle\int_c^d g(x)h(y)\ dy = g(x)\int_c^d h(y)\ dy$ であることに注意する．このとき，フビニの定理により，

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,\, y)\ dxdy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\, y)\ dy\right)\ dx = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y)\ dy\right)\ dx \\
&= \int_a^b g(x)\left(\int_c^d h(y)\ dy\right)\ dx
\end{aligned}$$

更に，$\displaystyle\int_c^d h(y)\ dy$ は定数であることに注意すると，

$$\iint_D f(x,\, y)\ dxdy = \left(\int_c^d h(y)\ dy\right)\int_a^b g(x)\ dx = \left(\int_a^b g(x)\ dy\right)\left(\int_c^d h(y)\ dy\right)$$

6.1.4



(1) 縦線型領域とみなすと，

$$\begin{aligned}
&D = D_1 \cup D_2 \\
&\qquad D_1 = \{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq x^2\}, \\
&\qquad D_2 = \{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 1 \leqq x \leqq 2, \quad 0 \leqq y \leqq 1\}
\end{aligned}$$

であるが，横線型領域とみなすと，

$$D = \{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \quad \sqrt{y} \leqq x \leqq 2\}$$

である．よって，累次積分の表示は，縦線型の場合は，

$$\iint_D f(x,\,y)\ dxdy = \iint_{D_1} f(x,\,y)\ dxdy + \iint_{D_2} f(x,\,y)\ dxdy$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x,\,y)\ dy \right)\ dx + \int_1^2 \left(\int_0^1 f(x,\,y)\ dy \right)\ dx$$

であり，横線型の場合は，

$$\iint_D f(x,\,y)\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,\,y)\ dx \right)\ dy$$

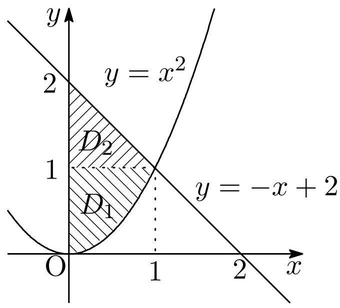
である．

(2) 縦線型領域とみなすと，

$$D = \{(x,\,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leqq y \leqq -x+2\}$$

であるが，横線型領域とみなすと，

$$D = D_1 \cup D_2$$
$$D_1 = \{(x,\,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq y \leqq 1, \quad 0 \leqq x \leqq \sqrt{y}\},$$
$$D_2 = \{(x,\,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 1 \leqq y \leqq 2, \quad 0 \leqq x \leqq -y+2\}$$



である．よって，累次積分の表示は，縦線型の場合は，

$$\iint_D f(x,\,y)\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{-x+2} f(x,\,y)\ dy \right)\ dx$$

であり，横線型の場合は，

$$\iint_D f(x,\,y)\ dxdy = \iint_{D_1} f(x,\,y)\ dxdy + \iint_{D_2} f(x,\,y)\ dxdy$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,\,y)\ dx \right)\ dy + \int_1^2 \left(\int_0^{-y+2} f(x,\,y)\ dx \right)\ dy$$

である．

6.1.5

(1)

$$\iint_D xe^{xy}\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^2 xe^{xy}\ dy \right)\ dx = \int_0^1 \left[e^{xy}\right]_{y=1}^{y=2}\ dx$$
$$= \int_0^1 (e^{2x} - e^x)\ dx = \frac{(e-1)^2}{2}$$

(2)

$$\iint_D (x+y)\sin y\ dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x (x+y)\sin y\ dy \right)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-(x+y)\cos y + \sin y\right]_{y=0}^{y=x}\ dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 2x\cos x + \sin x)\ dx = 3 - \pi + \frac{\pi^2}{8}$$

(3)

$$\iint_D \frac{x}{y}\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^{e^x} \frac{x}{y}\ dy\right)\ dx = \int_0^1 [x\log y]_{y=1}^{y=e^x}\ \ dx$$
$$= \int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}$$

(4)

$$\iint_D \cos x \cos^3 y\ dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^y \cos x \cos^3 y\ dx\right)\ dy = \int_0^1 \left[\sin x \cos^3 y\right]_{x=0}^{x=y}\ dy$$
$$= \int_0^1 \sin y \cos^3 y\ dy$$

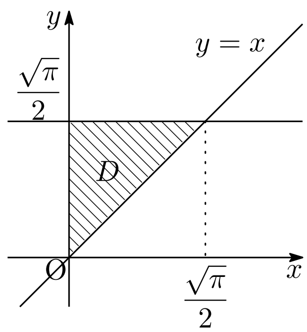
（ここで，$t = \cos y$ とおくと，$\dfrac{dt}{dy} = -\sin y$ より，）

$$= \int_0^1 t^3\ dt = \frac{1}{4}$$

(5)

$$\iint_D (x+y)\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x^2+2x}^{3x} (x+y)\ dy\right)\ dx + \int_1^2 \left(\int_{-x^2+2x}^{6-3x} (x+y)\ dy\right)\ dx$$
$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=-x^2+2x}^{y=3x}\ dx + \int_1^2 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=-x^2+2x}^{y=6-3x}\ dx$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + \frac{7x^2}{2}\right)\ dx + \int_1^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - \frac{5x^2}{2} - 12x + 18\right)\ dx$$
$$= \frac{109}{60} + \frac{139}{60} = \frac{62}{15}$$

6.1.6

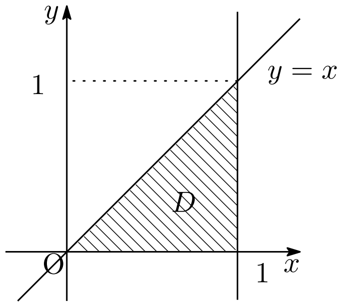


(1) 積分領域 D は，$D = \{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad x \leqq y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\}$ であり，縦線型領域とみている．これを横線型領域と考えると，

$$D = \{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad 0 \leqq x \leqq y\}$$

である．積分の順序を交換すると，

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\ dx \int_x^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \sin y^2\ dy = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\ dy \int_0^y \sin y^2\ dx = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left[x \sin y^2\right]_{x=0}^{x=y}\ dy$$
$$= \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} y \sin y^2\ dy = \left[-\frac{1}{2}\cos y^2\right]_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$



(2) 積分領域 D は，$D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\leqq y\leqq 1,\quad y\leqq x\leqq 1\}$ であり， 横線型領域とみている．これを縦線型領域と考えると，

$$D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\leqq x\leqq 1,\quad 0\leqq y\leqq x\}$$

である．積分の順序を交換すると，

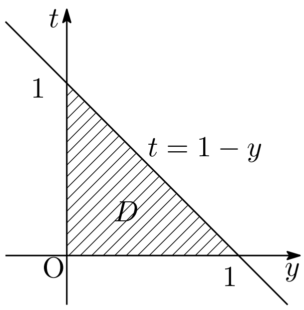
$$\begin{aligned}\int_0^1 dy\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}\,dx &= \int_0^1 dx\int_0^x e^{\frac{y}{x}}\,dy = \int_0^1 \left[xe^{\frac{y}{x}}\right]_{y=0}^{y=x} dy\\ &= \int_0^1 (e-1)x\,dy = \frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

6.1.7

(1) 演習問題 6.1.6 を一般化した公式であり，積分の順序を交換すればよい．ディリクレの公式の左辺は積分領域 D を縦線型領域 $D=\{(x,y)\mid a\leqq x\leqq b,\quad a\leqq y\leqq x\}$ とみなしたものであり，右辺は D を横線型領域 $D=\{(x,y)\mid a\leqq b\leqq b,\quad y\leqq x\leqq b\}$ とみなしたものである．

(2) ディリクレの公式を適用すると，

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x-y)\,dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x-y)\,dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x-y)\,dx\right) dy$$



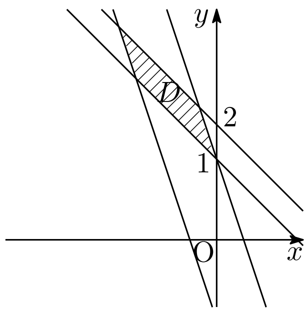
ここで，変数変換 $t=x-y$ を考えると，$\displaystyle\int_y^1 f(x-y)\,dx = \int_0^{1-y} f(t)\,dt$ である．よって，$\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x f(x-y)\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{1-y} f(t)\,dt\right) dy$ である．ここで，再度積分の順序を交換すると，

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^{1-y} f(t)\,dt\right) dy &= \int_0^1\left(\int_0^{1-t} f(t)\,dy\right) dt\\ &= \int_0^1 f(t)\left(\int_0^{1-t} dy\right) dt\\ &= \int_0^1 f(t)\,[y]_{y=0}^{y=1-t}\,dt = \int_0^1 f(t)(1-t)\,dt\\ &= \int_0^1 (1-x)f(x)\,dx\end{aligned}$$

6.2.1

(1) 1 次変換

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=3x+y \end{cases},\quad \text{すなわち，}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



を行うと，積分領域 D は uv 平面の長方形領域

$$E = \{(u,\ v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 1 \leqq u \leqq 2,\ -1 \leqq v \leqq 1\}$$

に対応する．また，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

である．よって，この 1 次変換に対するヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$ は

$$J = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

であるので，$dxdy = |J|dudv = \dfrac{1}{2}dudv$ である．よって，求める重積分の値は，

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{3x+y+1}{x+y}\ dxdy &= \iint_E \frac{v+1}{u}\cdot\frac{1}{2}dudv \\ &= \int_1^2 du \int_{-1}^1 \frac{1}{2u}\cdot(v+1)\ dv = \left(\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\ du\right)\left(\int_{-1}^1 (v+1)\ dv\right) \\ &= \log 2\end{aligned}$$

(2) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，積分領域 D は $r\theta$ 平面の長方形領域

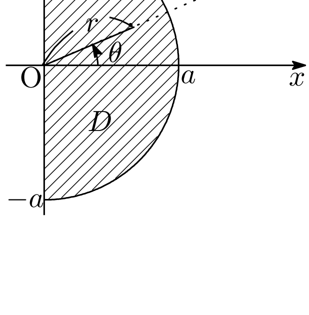
$$E = \{(r,\ \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq r \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

に対応する．よって，

$$\begin{aligned}\iint_D \sin(x^2+y^2)\ dxdy &= \int_E \sin r^2\cdot r\ drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin r^2\ dr \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin r^2\ dr\right) \\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{2}\cos r^2\right]_{r=0}^{r=\frac{\pi}{2}} = \pi\left(1-\cos\frac{\pi^2}{4}\right)\end{aligned}$$

(3) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により，積分領域 D は $r\theta$ 平面の長方形領域

$$E = \{(r,\ \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq r \leqq a,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\}$$

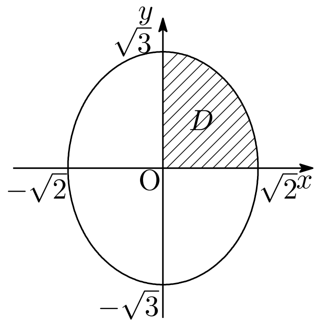


に対応する．よって，

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}\ dxdy = \int_E \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\cdot r\ drd\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}\ dr$$
$$= \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\left(\int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}\ dr\right)$$
$$= \pi\left[\sqrt{a^2+r^2}\right]_{r=0}^{r=a} = (\sqrt{2}-1)\pi a$$

(4) 変数変換 $x=\sqrt{2}r\cos\theta,\ y=\sqrt{3}r\sin\theta$ により，積分領域 D は $r\theta$ 平面の長方形領域

$$E=\{(r,\,\theta)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\}$$



に対応する．この変数変換のヤコビアン J は

$$J=\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(r,\,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\theta & -\sqrt{2}r\sin\theta\\ \sqrt{3}\sin\theta & \sqrt{3}r\cos\theta\end{pmatrix}=\sqrt{6}r$$

であるので，$dxdy=|J|drd\theta=\sqrt{6}rdrd\theta$ である．

よって，

$$\iint_D e^{-3x^2-2y^2}\ dxdy=\int_E e^{-6r^2}\cdot\sqrt{6}r\ drd\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 \sqrt{6}re^{-6r^2}\ dr$$
$$=\sqrt{6}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\left(\int_0^1 re^{-6r^2}\ dr\right)$$
$$=\frac{\sqrt{6}\pi}{2}\left[-\frac{1}{12}e^{-6r^2}\right]_{r=0}^{r=1}=\frac{\sqrt{6}}{24}\pi\left(1-\frac{1}{e^6}\right)$$

(**注意**) この問題では，x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍，y 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍して楕円を円にして，その後で極座標変換を行う変数変換を行っている．一般に，積分領域が楕円の領域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ である場合（ただし，$a>0,\,b>0$ とする）には，次の座標変換を用いると，重積分の計算が容易になることが多い．

$$\begin{cases} x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta\end{cases}$$

この変数変換で，領域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ は領域 $0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$ に対応する．また，この変数変換のヤコビアンは

$$J=\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(r,\,\theta)}=\det\begin{pmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{pmatrix}=abr$$

である．

6.2.2

(1)

$$\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\frac{\partial(u,\,v)}{\partial(x,\,y)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

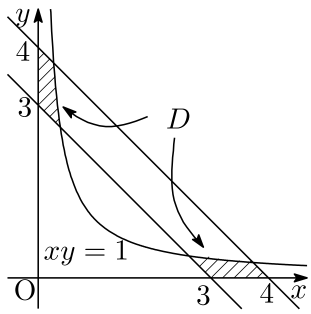
$$= \det\left(\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ここで，連鎖律（定理 5.5.4)（教科書 115 ページ）を最後の行列の各成分の計算に用いると，

$$\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\frac{\partial(u,\,v)}{\partial(x,\,y)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

(2) 変数変換



$$\begin{cases} u = xy \\ v = x + y \end{cases}$$

を用いると，積分範囲 D は uv 平面の長方形領域

$$E = \{(u,\,v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq u \leqq 1,\, 3 \leqq v \leqq 4\}$$

に対応する．このとき，

$$\frac{\partial(u,\,v)}{\partial(x,\,y)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = y - x$$

である．よって，(1) により，

$$\left|\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right| = \frac{1}{|y-x|} = \frac{1}{\sqrt{(y-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x+y)^2 - 4xy}} = \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4u}}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)(x^2+y^2)\ dxdy &= \iint_E v(v^2-2u)\cdot\frac{1}{\sqrt{v^2-4u}}\ dudv\\ &= \int_0^1 du\int_3^4 \frac{v(v^2-2u)}{\sqrt{v^2-4u}}\ dv\\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}\sqrt{v^2-4u}(v^2+2u)\right]_{v=3}^{v=4} du\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\ (16+2u)\sqrt{16-4u}-(9+2u)\sqrt{9-4u}\ \right)\ du\\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{8}{5}(4-u)^{\frac{3}{2}}(16+u)-\frac{1}{5}(9-4u)^{\frac{3}{2}}(9+u)\right]_{u=0}^{u=1}\\ &= \frac{1}{15}(781-408\sqrt{3}+50\sqrt{5})\end{aligned}$$

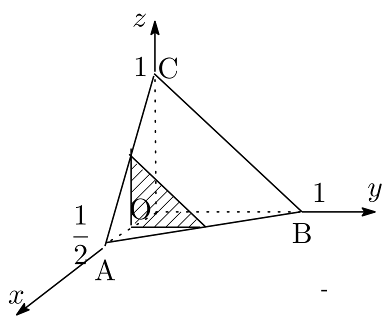
(**注意**) (i) この問題のように，$x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ の式を求めることが困難である場合には，(1) を利用して，$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ を求めるとよい．

(ii) 領域 D 内の $y=x$ を満たす部分では，上記の変数変換は 1 対 1 にならないが，この部分は D 内の面積 0 の集合である．よって，この変数変換は面積が 0 の部分 $y=x$ を除いて 1 対 1 となる．

(iii) $0\leqq u\leqq 1$, $3\leqq v\leqq 4$ では，$v^2-4u\neq 0$ であるので，u, v についての重積分を広義積分として考える必要もない．

6.3.1

(1) 領域 D を x 軸に垂直な平面で切ると，各 x $(0\leqq x\leqq \frac{1}{2})$ に対する切り口は



$$\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \mid 0\leqq y\leqq 1-2x,\ 0\leqq z\leqq 1-2x-y\}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}&\iiint_D \frac{1}{(2x+y+z+1)^2}\ dxdydz\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^{1-2x} dy\int_0^{1-2x-y}\frac{1}{(2x+y+z+1)^2}\ dxdy\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^{1-2x}\left[-\frac{1}{2x+y+z+1}\right]_{z=0}^{z=1-2x-y} dy\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^{1-2x}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x+y+1}\right) dy\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}y+\log(2x+y+1)\right]_{y=0}^{y=1-2x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+\log 2+x-\log(2x+1)\right) dx\\ &= \left[\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{2}x^2-x\log(2x+1)+x-\frac{1}{2}\log(2x+1)\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\log 2\end{aligned}$$

(2) 1 次変換

$$\begin{cases} u = x + 2y \\ v = 3x - z \\ w = y + 2z \end{cases}$$

を考えると，積分領域 D は uvw 空間の直方体領域

$$E = \{(u,\, v,\, w) \in \boldsymbol{R}^3 \mid 5 \leqq u \leqq 6,\ -2 \leqq v \leqq 2,\ -1 \leqq w \leqq 1\}$$

に対応している．3 変数の場合も，演習問題 6.2.2(1) と同様のこと

$$\frac{\partial(x,\, y,\, z)}{\partial(u,\, v,\, w)} \cdot \frac{\partial(u,\, v,\, w)}{\partial(x,\, y,\, z)} = 1$$

が成立することに注意して，今回の変数変換のヤコビアン J を求める．

$$J = \frac{\partial(u,\, v,\, w)}{\partial(x,\, y,\, z)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -11$$

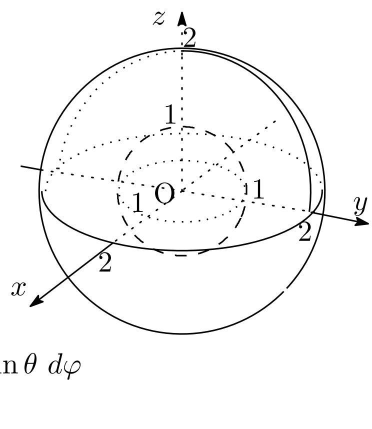
であるので，

$$\frac{\partial(x,\, y,\, z)}{\partial(u,\, v,\, w)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,\, v,\, w)}{\partial(x,\, y,\, z)}} = -\frac{1}{11}$$

である．よって，$dxdydz = |J|\ dudvdw = \dfrac{1}{11} dudvdw$ である．したがって，$y = \dfrac{6u - 2v - w}{11}$ であることに注意して，

$$\begin{aligned} \iiint_D y\ dxdydz &= \iiint_E \frac{6u - 2v - w}{11} \cdot \frac{1}{11} dudvdw \\ &= \frac{1}{121} \int_5^6 du \int_{-2}^2 dv \int_{-1}^1 (6u - 2v - w)\ dw \\ &= \frac{1}{121} \int_5^6 du \int_{-2}^2 (12u - 4v)\ dv = \frac{1}{121} \int_5^6 48u\ du = \frac{24}{11} \end{aligned}$$

(3) 極座標変換 $x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ を用いると，積分領域 D は $r\theta\varphi$ 空間の領域



$$E = \{(r,\, \theta,\, \varphi) \in \boldsymbol{R}^3 \mid 1 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\}$$

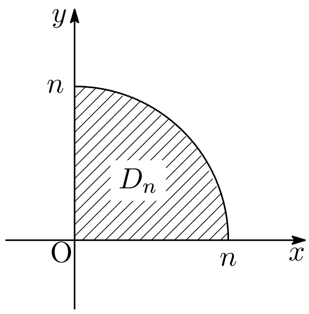
に対応する．また，この極座標変換のヤコビアンは $J = r^2 \sin\theta$ であることに注意すると，

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\ dxdydz = \iiint_E \frac{1}{r} \cdot |J| dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_1^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r} \cdot |r^2 \sin\theta|\ d\varphi = \int_1^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \sin\theta\ d\varphi$$

$$= \left(\int_1^2 r\ dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\ d\theta \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \right) = \frac{3\pi}{2}$$

6.4.1



(1) 各自然数 n に対して，

$$D_n = \{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq n^2,\, x \geqq 0,\, y \geqq 0\}$$

とおくと，有界な閉領域の列 $\{D_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ は D の単調近似列である．ここで，極座標変換 $x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta$ を考えると，領域 D_n は $r\theta$ 平面の領域

$$E_n = \{(r,\, \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq r \leqq n,\, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\}$$

と対応している．よって，各自然数 n に対して，

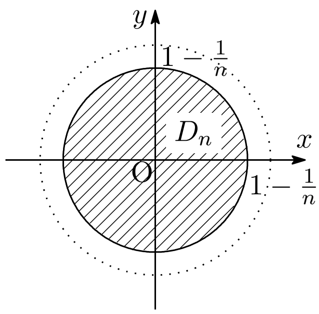
$$\begin{aligned}
I(D_n) &= \iint_{D_n} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy = \iint_{E_n} \frac{1}{(1+r^2)^2} \cdot rdrd\theta \\
&= \left(\int_0^n \frac{r}{(1+r^2)^2}\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) = \frac{\pi}{2}\int_0^n \frac{-1}{2}\frac{-2r}{(1+r^2)^2}\, dr \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1+r^2}\right]_{r=0}^{r=n} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{1+n^2}\right)
\end{aligned}$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty} I(D_n) = \frac{\pi}{4}$$

であるので，定理 6.4.1 により，問題の広義積分は収束し，

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy = \lim_{n\to\infty} I(D_n) = \frac{\pi}{4}$$



(2) 各自然数 n に対して，

$$D_n = \{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\}$$

とおくと，有界な閉領域の列 $\{D_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ は D の単調近似列である．ここで，極座標変換 $x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta$ を考えると，領域 D_n は $r\theta$ 平面の領域

$$E_n = \{(r,\, \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq r \leqq 1 - \frac{1}{n},\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

と対応している．よって，各自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}
I(D_n) &= \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dxdy = \iint_{E_n} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot rdrd\theta \\
&= \left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = 2\pi\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr \\
&= 2\pi\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_{r=0}^{r=1-\frac{1}{n}} = 2\pi\left(1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

したがって，

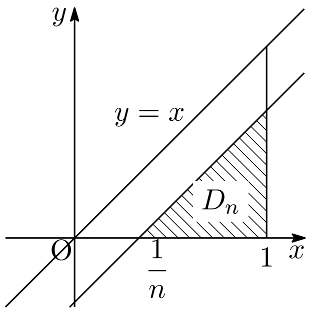
$$\lim_{n\to\infty} I(D_n) = 2\pi$$

であるので，定理 6.4.1 により，問題の広義積分は収束し，

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} I(D_n) = 2\pi$$

(3) 各自然数 n に対して，

$$D_n = \{(x,\,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \frac{1}{n}\}$$



とおくと，有界な閉領域の列 $\{D_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ は D の単調近似列である．よって，各自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}
I(D_n) &= \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt[3]{x-y}}\,dxdy \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dx \int_0^{x-\frac{1}{n}} (x-y)^{-\frac{1}{3}}\,dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[-\frac{3}{2}(x-y)^{\frac{2}{3}}\right]_{y=0}^{y=x-\frac{1}{n}} dx \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{3}{2}\left(x^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right) dx \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{3}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{3}}\right\} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty} I(D_n) = \frac{9}{10}$$

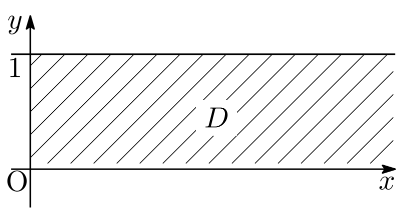
であるので，定理 6.4.1 により，問題の広義積分は収束し，

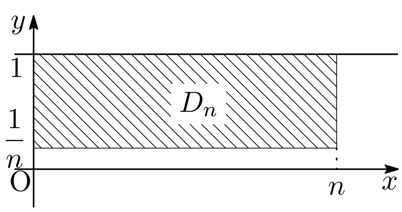
$$\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{x-y}}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} I(D_n) = \frac{9}{10}$$

(4) 各自然数 n に対して，

$$D_n = \{(x,\,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq n,\ \frac{1}{n} \leqq y \leqq 1\}$$

とおくと，有界な閉領域の列 $\{D_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ は D の単調近似列である．





よって，各自然数 n に対して，

$$\begin{aligned} I(D_n) &= \iint_{D_n} \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}}\ dxdy \\ &= \int_0^n dx \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}}\ dxdy = \left(\int_0^n e^{-x}\ dx\right)\left(\int_{\frac{1}{n}}^1 y^{-\frac{1}{2}}\ dy\right) \\ &= \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{x=n} \left[2y^{\frac{1}{2}}\right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=1} = 2\left(1-\frac{1}{e^n}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty} I(D_n) = 2$$

であるので，定理 6.4.1 により，問題の広義積分は収束し，

$$\iint_D \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}}\ dxdy = \lim_{n\to\infty} I(D_n) = 2$$

6.4.2

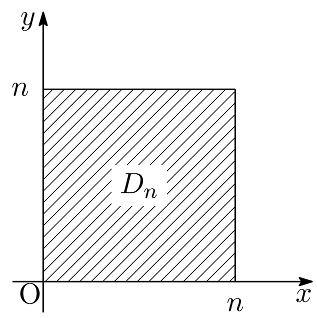
(1) 各自然数 n に対して，

$$D_n = \{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq n,\, 0 \leqq y \leqq n\}$$

とおくと，有界な閉領域の列 $\{D_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ は D の単調近似列である．領域 D_n での重積分 $I(D_n)$ を

$$I(D_n) = \iint_{D_n} \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\ dxdy$$

と定める．



<u>Case 1 : $\alpha \neq 1$ のとき</u>

$$\begin{aligned} I(D_n) &= \int_0^n dx \int_0^n \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\ dy = \int_0^n \left[\frac{1}{1-\alpha}(1+x+y)^{-\alpha+1}\right]_{y=0}^{y=n}\ dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^n \left((x+n+1)^{-\alpha+1} - (x+1)^{-\alpha+1}\right)\ dx \end{aligned}$$

<u>Subcase 1 : $\alpha \neq 1,\, 2$ のとき</u>

$$\begin{aligned} I(D_n) &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2-\alpha}(x+n+1)^{2-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha}(x+1)^{2-\alpha}\right]_{x=0}^{x=n} \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\left\{(2n+1)^{2-\alpha} - 2(n+1)^{2-\alpha} + 1\right\} \end{aligned}$$

よって，$2-\alpha < 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(D_n) = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$ である．$2-\alpha > 0$ $(\alpha \neq 1)$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left((2n+1)^{2-\alpha} - 2(n+1)^{2-\alpha}\right) = \lim_{n\to\infty}(2n+1)^{2-\alpha}\left\{1 - 2\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^{2-\alpha}\right\} = \pm\infty$$

である．よって，$2-\alpha>0\ (\alpha\neq 1)$ のとき，$\lim_{n\to\infty} I(D_n)$ は収束しない．

<u>Subcase 2 : $\alpha=2$ のとき</u>

$$I(D_n)=-\int_0^n \left\{(x+n+1)^{-1}-(x+1)^{-1}\right\}\,dx=2\log(n+1)-\log(2n+1)=\log\frac{n+2+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$

であるので，$\lim_{n\to\infty} I(D_n)=+\infty$ である．

<u>Case 2 : $\alpha=1$ のとき</u>

$$\begin{aligned}I(D_n)&=\int_0^n dx\int_0^n \frac{1}{1+x+y}\,dy=\int_0^n \left[\log(1+x+y)\right]_{y=0}^{y=n}\,dx\\&=\int_0^n \left(\log(x+n+1)-\log(x+1)\right)\,dx\\&=\left[(x+n+1)\log(x+n+1)-(x+1)\log(x+1)\right]_{x=0}^{x=n}\\&=(2n+1)\log(2n+1)-2(n+1)\log(n+1)\end{aligned}$$

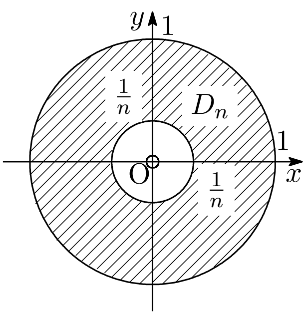
よって，

$$\lim_{n\to\infty} I(D_n)=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{2^{2n+1}}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)=+\infty$$

以上により，$\alpha>2$ のときのみ収束し，そのときの広義積分の値は $\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\,dxdy=\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$ である．

(2) 各自然数 n に対して，

$$D_n=\{(x,\,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid \left(\frac{1}{n}\right)^2\leqq x^2+y^2\leqq 1\}$$



とおくと，有界な閉領域の列 $\{D_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ は D の単調近似列である．領域 D_n での重積分 $I(D_n)$ を

$$I(D_n)=\iint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$$

と定める．ここで，極座変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を考えると，この変換により，領域 D_n は $r\theta$ 平面の領域

$$E_n=\{(r,\,\theta)\in\boldsymbol{R}^2 \mid \frac{1}{n}\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\}$$

に対応する．よって，

$$I(D_n)=\iint_{E_n}\frac{1}{r^{2\alpha}}\cdot r\,drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{1}{n}}^1 r^{1-2\alpha}\,dr=2\pi\int_{\frac{1}{n}}^1 r^{1-2\alpha}\,dr$$

<u>Case 1 : $\alpha\neq 1$ のとき</u> このとき，$1-2\alpha\neq -1$ である．

$$I(D_n)=\frac{\pi}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{n^{2(1-\alpha)}}\right)$$

よって，$\alpha < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(D_n) = \frac{\pi}{1-\alpha}$ である．$\alpha > 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(D_n) = +\infty$ である．

Case 2 : $\alpha = 1$ のとき

$$I(D_n) = 2\pi \log n$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(D_n) = +\infty$ である．

以上により，$0 < \alpha < 1$ のときのみ収束し，そのときの広義積分の値は $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy = \frac{\pi}{1-\alpha}$ である．

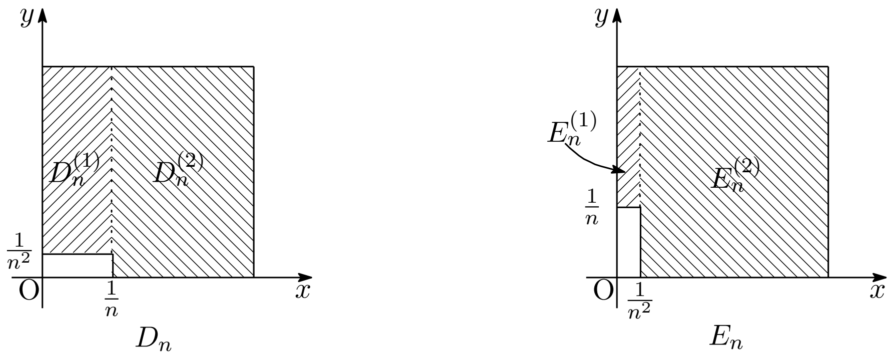
6.4.3

(1) 領域 D_n を次のように 2 つに分ける．

$$D_n = [0,\,1]\times[0,\,1] - [0,\,\frac{1}{n})\times[0,\,\frac{1}{n^2}) = D_n^{(1)} \cup D_n^{(2)}$$

$$D_n^{(1)} = \{(x,\,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2} \leqq y \leqq 1\}$$

$$D_n^{(2)} = \{(x,\,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$$



このとき，

$$\begin{aligned}
\iint_{D_n} \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy &= \iint_{D_n^{(1)}} \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy + \iint_{D_n^{(2)}} \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} dx \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy + \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=\frac{1}{n^2}}^{y=1} dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\frac{1}{n^2}}{(x+\frac{1}{n^2})^2}\right) dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{n^2}}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{n}} + \left[-\frac{1}{x+1}\right]_{x=\frac{1}{n}}^1 \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

である．よって，

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy=-\frac{1}{2}$$

(2) 領域 E_n も次のように 2 つに分ける．

$$E_n=[0,\,1]\times[0,\,1]-[0,\,\frac{1}{n^2})\times[0,\,\frac{1}{n})=E_n^{(1)}\cup E_n^{(2)}$$
$$E_n^{(1)}=\{(x,\,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid 0\leqq x\leqq\frac{1}{n^2},\,\frac{1}{n}\leqq y\leqq 1\}$$
$$E_n^{(2)}=\{(x,\,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid \frac{1}{n^2}\leqq x\leqq 1,\,0\leqq y\leqq 1\}$$

このとき，

$$\begin{aligned}\iint_{E_n}\frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy&=\iint_{E_n^{(1)}}\frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy+\iint_{E_n^{(2)}}\frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy\\&=\int_0^{\frac{1}{n^2}}dx\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\ dy+\int_{\frac{1}{n^2}}^1dx\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\ dy\\&=\int_0^{\frac{1}{n^2}}\left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=1}\ dx+\int_{\frac{1}{n^2}}^1\left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=1}\ dx\\&=\int_0^{\frac{1}{n^2}}\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{\frac{1}{n}}{(x+\frac{1}{n})^2}\right)\ dx+\int_{\frac{1}{n^2}}^1\frac{1}{(x+1)^2}\ dx\\&=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{n}}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{n^2}}+\left[-\frac{1}{x+1}\right]_{x=\frac{1}{n^2}}^1\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

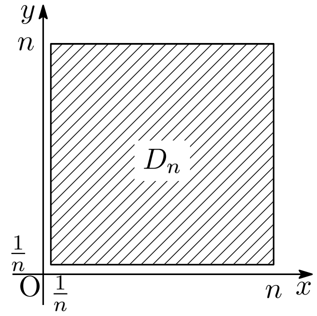
である．よって，

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy=\frac{1}{2}$$

(3) $f(x,\,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ は D にて $f(x,\,y)\geqq 0$ であるとは限らない．また，(1), (2) の結果により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy\neq\lim_{n\to\infty}\iint_{E_n}\frac{x-y}{(x+y)^3}\ dxdy$ である．D の単調近似列の取り方によっては極限値が異なることがある．以上により，被積分関数 $f(x,\,y)$ が非負であるとは限らない場合には，定理 6.4.1 は成立しない．

6.4.4

(1) 各自然数 n に対して，



$$D_n=\{(x,\,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid \frac{1}{n}\leqq x\leqq n,\,\frac{1}{n}\leqq y\leqq n\}$$

とおくと，有界な閉領域の列 $\{D_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ は D の単調近似列である．領域 D_n での重積分 $I(D_n)$ を

$$I(D_n) = \iint_{D_n} e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1}\ dxdy$$

と定める．このとき，

$$\begin{aligned} I(D_n) &= \int_{\frac{1}{n}}^{n} dx \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1}\ dy = \int_{\frac{1}{n}}^{n} dx \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-x} x^{p-1} \cdot e^{-y} y^{q-1}\ dy \\ &= \left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-x} x^{p-1}\ dx \right) \left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-y} y^{q-1}\ dy \right) \end{aligned}$$

例題 4.5.3 により，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-x} x^{p-1}\ dx = \Gamma(p), \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-y} y^{p-1}\ dy = \Gamma(q)$$

であることがわかる．よって，

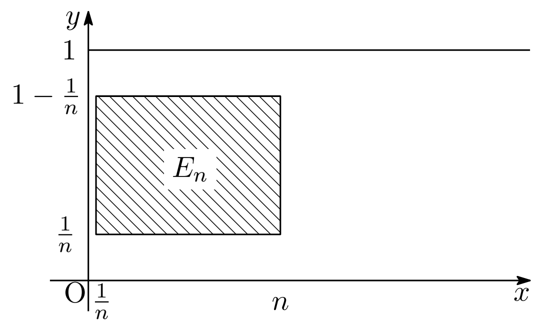
$$I = \lim_{n\to\infty} I(D_n) = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

(2) 変数変換 $x = uv$, $y = u(1-v)$ のヤコビアン J は

$$J = \frac{\partial(x,\, y)}{\partial(u,\, v)} = \det \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} = -u$$

である．よって，

$$I = \iint_D e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1}\ dxdy = \iint_E e^{-u} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} \cdot ududv$$



各自然数 n に対して，

$$E_n = \{(u,\, v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid \frac{1}{n} \leqq u \leqq n,\ \frac{1}{n} \leqq v \leqq 1 - \frac{1}{n}\}$$

とおくと，有界な閉領域の列 $\{E_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ は E の単調近似列である．領域 E_n での重積分 $I(E_n)$ を

$$I(E_n) = \iint_{E_n} e^{-u} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} \cdot ududv$$

と定める．このとき，

$$\begin{aligned} I(E_n) &= \iint_{E_n} e^{-u} u^{p+q-1} \cdot v^{p-1} (1-v)^{q-1}\ dudv \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{n} du \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} e^{-u} u^{p+q-1} \cdot v^{p-1} (1-v)^{q-1}\ dv \\ &= \left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-u} u^{p+q-1}\ du \right) \left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} v^{p-1} (1-v)^{q-1}\ dv \right) \end{aligned}$$

例題 4.5.3 や 演習問題 4.5.4 により，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-u}u^{p+q-1}\,du = \Gamma(p+q), \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv = B(p,\,q)$$

であることがわかる．よって，

$$I = \lim_{n\to\infty} I(E_n) = \Gamma(p+q)B(p,\,q) = B(p,\,q)\Gamma(p+q)$$

6.5.1

先ず，$m\times n$ 型行列 A の階数 $\mathrm{rank}A$ について，次が成立することに注意する．

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}A = r \iff & A \text{ の } r \text{ 次の小行列式の中に } 0 \text{ でないものがあり，}\\ & A \text{ の } r+1 \text{ 次の小行列式は全て } 0 \text{ である}\end{aligned}$$

また，

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}J\Phi = 2 \iff & J\Phi \text{ の } 2 \text{ 次の小行列式の中に } 0 \text{ でないものがある}\\
& \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ の中に } 0 \text{ でないものがある}\\
\iff & \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ の中に } 0 \text{ でないものがある}\\
\iff & \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)},\quad \frac{\partial(y,\,z)}{\partial(u,\,v)},\quad \frac{\partial(z,\,x)}{\partial(u,\,v)} \text{ の中に } 0 \text{ でないものがある}\\
\iff & \left(\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,\,z)}{\partial(u,\,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,\,x)}{\partial(u,\,v)}\right)^2 \neq 0\end{aligned}$$

6.5.2

関数 $z = f(x,\,y)$ のグラフが定める曲面の媒介変数表示は

$$\Phi(x,\,y) = (x,\,y,\,f(x,\,y))$$

である．このとき，

$$\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(x,\,y)}=1,\quad \frac{\partial(y,\,z)}{\partial(x,\,y)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}=-\frac{\partial f}{\partial x},$$

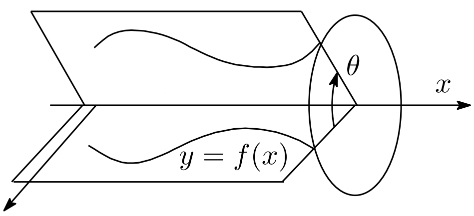
$$\frac{\partial(z,\,x)}{\partial(x,\,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{\partial f}{\partial y}$$

である．よって，

$$\sqrt{\left(\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(y,\,z)}{\partial(u,\,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,\,x)}{\partial(u,\,v)}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

したがって，定理 6.5.1 を適用することにより，系 6.5.2 が得られる．

6.5.3



回転体の媒介変数表示は

$$\Phi(x,\,\theta)=(x,\,f(x)\cos\theta,\,f(y)\sin\theta))$$
$$D=[a,\,b]\times[0,\,2\pi]$$

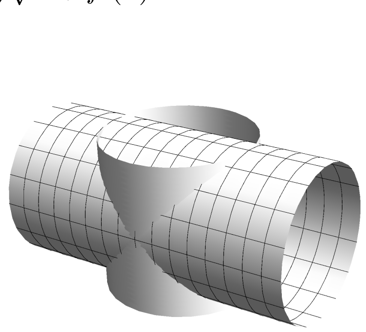
である．このとき，

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(x,\,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(y,\,z)}{\partial(x,\,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,\,x)}{\partial(x,\,\theta)}\right)^2\\
&=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f'(x)\cos\theta & -f(x)\sin\theta \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} f'(x)\cos\theta & -f(x)\sin\theta \\ f'(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} f'(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2\\
&=f(x)^2(1+f'(x)^2)
\end{aligned}$$

である．よって，定理 6.5.1 により，

$$\begin{aligned}
S&=\iint_D\sqrt{f(x)^2(1+f'(x)^2)}\,dxdy=\int_a^b dx\int_0^{2\pi}f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,d\theta\\
&=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\right)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx
\end{aligned}$$

6.5.4



(1) 問題の曲面は $z\geqq 0$ の部分と $z\leqq 0$ の部分に分かれ，xy 平面に関して対称である．円柱 $x^2+z^2=a^2$ の $z\geqq 0$ の部分は，$z=\sqrt{a^2-x^2}$ のグラフが定める曲面と考えることができる．よって，求める面積は

$$S=2\iint_D\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dxdy$$

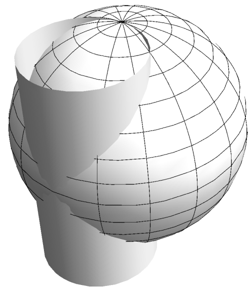
（ただし，$D = \{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq a^2\}$）である．
$x^2 + z^2 = a^2$ の両辺を x で微分して，

$$2x + 2zz_x = 0$$

（陰関数の微分法）により，$z_x = -\dfrac{x}{z}$ を得る．同様に y で微分して，$z_y = 0$ を得る．よって，

$$\begin{aligned}
S &= 2\iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = 2\iint_D \sqrt{\frac{x^2+z^2}{z^2}}\, dxdy \\
&= 2a \iint_D \frac{1}{z}\, dxdy = 2a \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dxdy \\
&= 2a \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dy = 4a \int_{-a}^{a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dy \\
&= 4a \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \left[y\right]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = 4a \int_{-a}^{a} dx \\
&= 8a^2
\end{aligned}$$

(2) 問題の曲面は $z \geqq 0$ の部分と $z \leqq 0$ の部分に分かれ，xy 平面に関して対称である．よって，求める面積は



$$S = 2\iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy$$

（ただし，$D = \{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 2ax\}$）である．
z を $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ で定められる陰関数とみて，両辺を x で微分すると，

$$2x + 2zz_x = 0$$

すなわち，$z_x = -\dfrac{x}{z}$ を得る．同様に y で微分して，$z_y = -\dfrac{y}{z}$ を得る．よって，

$$\begin{aligned}
S &= 2\iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = 2\iint_D \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}\, dxdy \\
&= 4a \iint_D \frac{1}{z}\, dxdy = 4a \iint_D \frac{1}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy
\end{aligned}$$

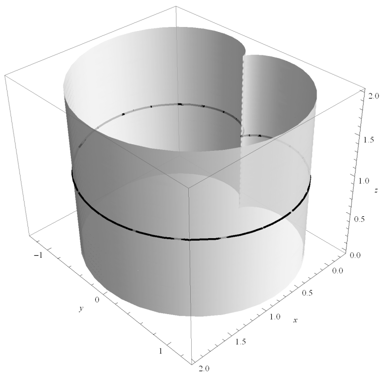
ここで，極座標変換 $x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta$ を用いると，領域 D は $r\theta$ 平面内の領域

$$E = \{(r,\, \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq r \leqq 2a\cos\theta,\, -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\}$$

に対応する．よって，

$$
\begin{aligned}
S &= 4a\int_E \frac{1}{\sqrt{4a^2-r^2}}\cdot rdrd\theta = 4a\int_0^{2a\cos\theta} dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}\ d\theta \\
&= 4a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{4a^2-r^2}\right]_{r=0}^{r=2a\cos\theta}\ d\theta = 4a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2a-\sqrt{4a^2(1-\cos^2\theta)}\right)\ d\theta \\
&= 8a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)\ d\theta = 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)\ d\theta \\
&= 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\ d\theta = 16a^2\left[\theta+\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= 8a^2(\pi-2)
\end{aligned}
$$

(3) 一般に，xy 平面上の曲線 C ： $(x(t),\, y(t))$ に対する柱面の媒介変数表示は



$$\Phi(t,\, z) = (x(t),\, y(t),\, z)$$

で与えらる．

さて，問題のカーディオイドの柱面の媒介変数表示は

$$
\begin{aligned}
\Phi(\theta,\, z) &= ((1+\cos\theta)\cos\theta,\, (1+\cos\theta)\sin\theta,\, z) \\
D &= [0,\, 2\pi]\times[0,\, 2]
\end{aligned}
$$

である．このとき，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x,\, y)}{\partial(\theta,\, z)} &= \begin{vmatrix} -\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta & 0 \\ -\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = 0, \\
\frac{\partial(y,\, z)}{\partial(\theta,\, z)} &= \begin{vmatrix} -\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta \\
&= \cos 2\theta+\cos\theta = 2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
\frac{\partial(z,\, x)}{\partial(\theta,\, z)} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = 2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta \\
&= \sin 2\theta+\sin\theta = 2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

である．よって，

$$\sqrt{\left(\frac{\partial(x,\, y)}{\partial(\theta,\, z)}\right)^2+\left(\frac{\partial(y,\, z)}{\partial(\theta,\, z)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,\, x)}{\partial(\theta,\, z)}\right)^2} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

したがって，求める曲面の面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, dz \\
&= \left(\int_0^{2\pi} 2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta\right)\left(\int_0^2 dz\right) = 4\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\
&= 4\left(\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta\right) = 4\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta - \int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta\right) \\
&= 16
\end{aligned}
$$

(**注意**) (i) このカーディオイドの柱面は，柱面の一部である z 軸のところで

$$
\left(\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(\theta,\,z)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,\,z)}{\partial(\theta,\,z)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,\,x)}{\partial(\theta,\,z)}\right)^2 = 0
$$

となり，$\mathrm{rank} J\Phi \neq 2$ である．z 軸のところで柱面は正則媒介変数曲面になっていない．このことは挿入図からも見て取ることができる．しかしながら，面積 0 の部分であるので，上記のような計算で面積を出すことに問題はない．

(ii) カーディオイドの曲線の長さは 2 であり，柱面の面積は「（カーディオイドの長さ）×（柱面の高さ）」となっている．このことは一般化することができ，xy 平面の曲線 $C\ :\ (x(t),\,y(t))$ $(a \leqq t \leqq b)$ の柱面の $c \leqq z \leqq d$ の部分の面積は，曲線 C の長さ $\times(d-c)$ と一致する．興味ある人は証明してみるとよい．

6.5.5

(1) 例題 6.5.2 のトーラスは方程式 $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$ で与えられることがわかる．よって，$z \geqq 0$ の部分は，関数 $z=\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}$ のグラフが定める曲面と考えることができる．ただし，関数の定義域は

$$
D = \{(x,\,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9\}
$$

である．関数 z を $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$ で定められる陰関数とみて，両辺を x で微分すると，

$$
2(\sqrt{x^2+y^2}-2)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2zz_x = 0
$$

すなわち，$z_x = -\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{x(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を得る．同様に y で微分して，$z_y = -\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{y(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を得る．よって，

$$
\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2} = \sqrt{\frac{z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}{z^2}} = \frac{1}{z}
$$

したがって，求める面積は

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\ dxdy = \iint_D \frac{1}{z}\ dxdy$$
$$= \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}}\ dxdy$$

ここで，極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を考えると，領域 D は $r\theta$ 平面の領域

$$E = \{(r,\,\theta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 1 \leqq r \leqq 3,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

に対応する．よって，

$$S = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}}\ dxdy = \iint_E \frac{1}{\sqrt{1 - (r-2)^2}} \cdot rdrd\theta$$
$$= \int_1^3 dr \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{(3-r)(r-1)}}\ d\theta = \left(\int_0^{2\pi}\ d\theta\right)\left(\int_1^3 \frac{r}{\sqrt{(3-r)(r-1)}}\ dr\right)$$

ここで，不定積分 $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{(3-r)(r-1)}}\ dr$ を計算するために，$t = \sqrt{\dfrac{3-r}{r-1}}$ とおく（教科書 74 ページ [2](b)）．$dr = -\dfrac{4t}{(t^2+1)^2}dt$ より，

$$\int \frac{r}{\sqrt{(3-r)(r-1)}}\ dr = \int \frac{r}{(r-1)\sqrt{\dfrac{3-r}{r-1}}}\ dr$$
$$= -2\int \frac{t^2+3}{(t^2+1)^2}\ dt = -2\int \left(\frac{1}{t^2+1} + \frac{2}{(t^2+1)^2}\right)\ dt$$

例題 4.2.1（教科書 67 ページ）により，$\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\ dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \tan^{-1} t\right)$ であるので，

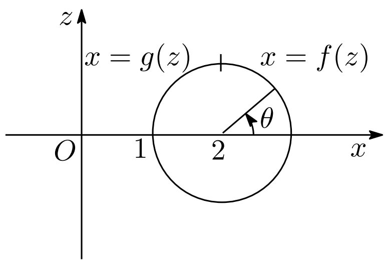
$$\int \frac{r}{\sqrt{(3-r)(r-1)}}\ dr = \frac{-2t}{t^2+1} - 4\tan^{-1} t = -\sqrt{(3-r)(r-1)} - 4\tan^{-1}\sqrt{\frac{3-r}{r-1}}$$

よって，広義積分として $\displaystyle\int_1^3 \frac{r}{\sqrt{(3-r)(r-1)}}\ dr$ を計算すると，

$$\int_1^3 \frac{r}{\sqrt{(3-r)(r-1)}}\ dr = \lim_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2 \to +0} \int_{1+\varepsilon_1}^{3-\varepsilon_2} \frac{r}{\sqrt{(3-r)(r-1)}}\ dr = 2\pi$$

したがって，求める面積は

$$S = 2\pi \int_1^3 \frac{r}{\sqrt{(3-r)(r-1)}}\ dr = 4\pi^2$$



(2) xz 平面の半円 $(x-2)^2+z^2=1$ $(z \geqq 0)$ の，直線 $x=2$ の右側の部分を関数 $x=f(z)$ のグラフとみなし，左側の部分を $x=g(z)$ のグラフと見なす.

$$f(z)=2+\sqrt{1-z^2}, \quad g(z)=2-\sqrt{1-z^2} \quad (0 \leqq z \leqq 1)$$

関数 $x=f(z)$ のグラフを z 軸のまわりに回転してできる回転体の面積を S_1 とし，関数 $x=g(z)$ のグラフを z 軸のまわりに回転してできる回転体の面積を S_2 とする.

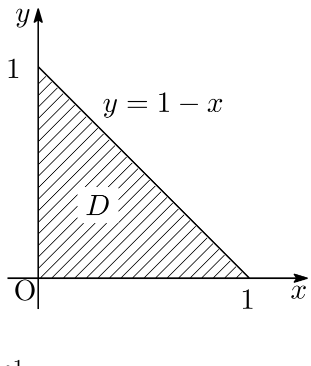
$$\begin{aligned} S_1 &= 2\pi\int_0^1 f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}\ dz = 2\pi\int_0^1 (2+\sqrt{1-z^2})\sqrt{1+\frac{z^2}{1-z^2}}\ dz \\ &= 2\pi\int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1-z^2}}+1\right)\ dz = 2\pi\left[2\sin^{-1} z + z\right]_{z=0}^{z=1} \\ &= 2\pi(\pi+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= 2\pi\int_0^1 g(z)\sqrt{1+g'(z)^2}\ dz = 2\pi\int_0^1 (2-\sqrt{1-z^2})\sqrt{1+\frac{z^2}{1-z^2}}\ dz \\ &= 2\pi\int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1-z^2}}-1\right)\ dz = 2\pi\left[2\sin^{-1} z - z\right]_{z=0}^{z=1} \\ &= 2\pi(\pi-1) \end{aligned}$$

したがって，求める面積は

$$S = S_1 + S_2 = 4\pi^2$$

6.5.6



(1) 三角形領域 D を縦線型領域とみなすと，

$$D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1-x\}$$

先ず，質量 M を求めると，

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \rho(x, y)\ dxdy = \iint_D (x+y)\ dxdy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)\ dy = \int_0^1 \left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x}\ dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)\ dx \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

次に，$\overline{x}$, $\overline{y}$ を求める.

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,\,y)\;dxdy = 3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+xy)\;dy \\
&= 3\int_0^1 \left[x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x-x^3)\;dx \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

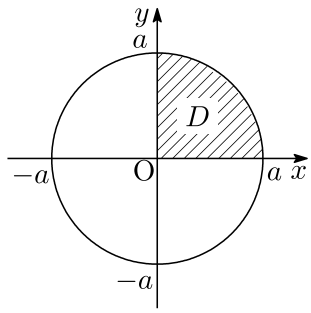
同様に，$\overline{y} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_D y\rho(x,\,y)\;dxdy$ を計算してもよいが，領域 D が直線 $y=x$ に関して対称で，この計算式も x と y について $\overline{x}$ と対称的であるので，$\overline{y}=\overline{x}=\dfrac{8}{3}$ である．

よって，求める D の重心は $\left(\dfrac{3}{8},\,\dfrac{3}{8}\right)$

(2) 極座標変換 $x=r\cos\theta,\, y=r\sin\theta$ により，領域 D は $r\theta$ 平面の領域,

$$
E=\{(r,\,\theta)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\leqq r\leqq a,\, 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\}
$$

と対応する．



図心を求めるので，密度関数は定数値関数である．密度関数を $\rho(x,\,y)=c$ とする．

先ず，質量 M を求めると，

$$
\begin{aligned}
M &= \iint_D \rho(x,\,y)\;dxdy = \iint_D c\;dxdy = c\iint_D\;dxdy = c\times(D\text{ の面積}) \\
&= \frac{\pi a^2 c}{4}
\end{aligned}
$$

次に，$\overline{x},\,\overline{y}$ を求める．

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,\,y)\;dxdy = \frac{4}{\pi a^2 c}\iint_D cx\;dxdy \\
&= \frac{4}{\pi a^2 c}\int_0^a dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} cr^2\cos\theta\;d\theta = \frac{4}{\pi a^2}\left(\int_0^a r^2\;dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\;d\theta\right) \\
&= \frac{4a}{3\pi}
\end{aligned}
$$

同様に，$\overline{y} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_D y\rho(x,\,y)\;dxdy$ を計算してもよいが，領域 D が直線 $y=x$ に関して対称で，この計算式も x と y について $\overline{x}$ と対称的であるので，$\overline{y}=\overline{x}=\dfrac{4a}{3\pi}$ である．

よって，求める D の重心は $\left(\dfrac{4a}{3\pi},\,\dfrac{4a}{3\pi}\right)$

6.5.7

(1) 三角形領域 D の図心を求めるために，密度関数を $\rho(x,\,y)=c$（定数）とする．

$$
M=\iint_D \rho(x,\,y)\;dxdy = \iint_D c\;dxdy = c\iint_D\;dxdy = c\times(D\text{ の面積}) = \frac{c}{2}
$$

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,\,y)\;dxdy = \frac{2}{c}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} cx\;dy = \frac{1}{3}$$

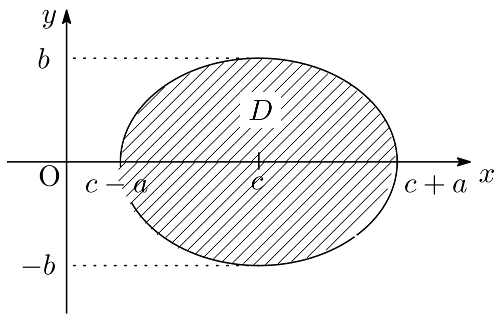
同様に，対称性を利用すると，$\overline{y} = \overline{x} = \dfrac{1}{3}$ である．よって，三角形領域 D の図心は $\left(\dfrac{1}{3},\,\dfrac{1}{3}\right)$ である．

したがって，図心から回転軸までの距離は $\dfrac{1}{3}$ であるので，パップスの定理により，求める回転体の体積 V は

$$V = (D \text{ の面積}) \times (\text{円周の長さ}) = \frac{1}{2}\times 2\pi \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

である．(確かに，円錐の体積の公式により求めた値と一致する．)

(2) 領域 D の面積 $\mu(D) = \displaystyle\iint_D dxdy$ を求める．



そのために，変数変換

$$\begin{cases} x - c = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}, \quad \text{すなわち，} \quad \begin{cases} x = ar\cos\theta + c \\ y = br\sin\theta \end{cases}$$

を考えると，この変数変換のヤコビアン J は

$$J = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(r,\,\theta)} = abr$$

である．また，この変換により，領域 D は $r\theta$ 平面の領域

$$E = \{(r,\,\theta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leqq r \leqq 1,\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

と対応している．よって，

$$\mu(D) = \iint_D dxdy = \iint_E abr\;drd\theta = ab\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r\;dr\right) = \pi ab$$

図心を求めるために，密度関数を $\rho(x,\,y) = k$（定数）とすると，質量 M は

$$M = \iint_D \rho(x,\,y)\;dxdy = \iint_D k\;dxdy = c\iint_D dxdy = k\times(D \text{ の面積}) = \pi abk$$

次に，$\overline{x}, \overline{y}$ を求める．

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,\,y)\;dxdy = \frac{1}{\pi abk}\iint_D kx\;dxdy \\ &= \frac{1}{\pi ab}\int_0^1 dr\int_0^{2\pi} abr(ar\cos\theta + c)\;d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}ar^3\cos\theta + \frac{1}{2}cr^2\right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}a\cos\theta + \frac{1}{2}c\right)\;d\theta = c\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,\, y)\ dxdy = \frac{1}{\pi abk}\iint_D ky\ dxdy \\
&= \frac{1}{\pi ab}\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} ab^2 r^2 \sin\theta\ d\theta = \frac{b}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\ d\theta\right)\left(\int_0^1 r^2\ dr\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって，この楕円領域 D の図心は $(c,\, 0)$ である．図心から回転軸までの距離が c であることに注意すると，パップスの定理により，求める回転体の体積 V は，

$$
V = (D \text{ の面積}) \times (\text{円周の長さ}) = \pi ab \times 2\pi \times c = 2\pi^2 abc
$$

である．