

第5章

5.1.1

(1) 根号 $\sqrt{\quad}$ の中は0以上でなければならないので, $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ である.

定義域は $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

(2) 対数の真数は正でなければならないので, $x^2 + y^2 - 1 > 0$ である.

定義域は $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$

(3) 根号 $\sqrt{\quad}$ の中は0以上でなければならないので, $3 - x - y \geq 0$ である.

定義域は $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \leq 3\}$

(4) 分母の値が0のときは定義されない. 定義域は $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0\}$

5.2.1

(1)

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{x - y} = \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{(x - y)(x - 2y)}{x - y} = \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} (x - 2y) = -1$$

(2) $\lim_{(x, y) \rightarrow (3, 0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$ であることに注意すると,

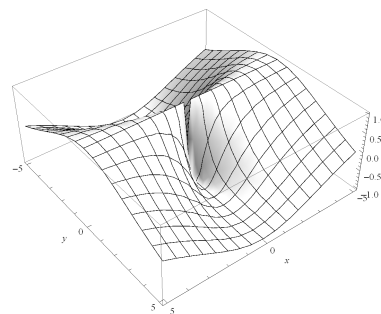
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (3, 0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x, y) \rightarrow (3, 0)} x \cdot \frac{\sin(xy)}{xy} = 3 \times 1 = 3$$

(3) 2通りの方法で点 (x, y) を点 $(0, 0)$ に近づける.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$(ii) \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

近づけ方によって値が異なるので, 極限值は存在しない.



$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ のグラフ

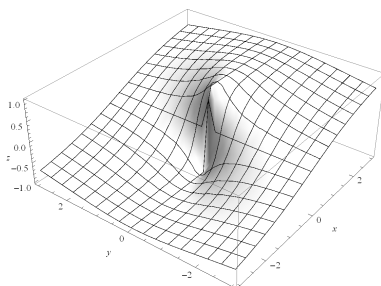
(4) $y \rightarrow 0$ の後に $x \rightarrow 0$ とする近づき方を考えると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

となる. ところが,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{-x} = -1$$

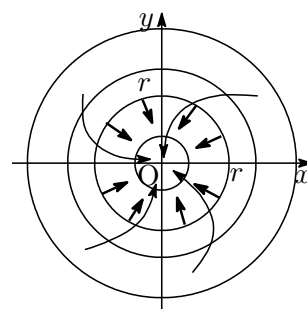
となり, 右極限と左極限の値が異なるので, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ は存在しない.



$z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ のグラフ

よって, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は存在しない.

(注意) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ を調べるのに有効な方法として, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (極座標変換) とおき, $(x,y) \rightarrow (0,0)$ の代わりに $r \rightarrow +0$ とする方法である. これは, 点 (x,y) が原点に近づくことは距離が 0 に近づくことと同じことと考えることに由来する. この方法を利用すると, (4) は次のように解答することができる.



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{r \cos \theta}{r} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta$$

である. よって, 右辺の値は, 点 (x,y) が原点を通るいろいろな直線 (直線の傾きが $\tan \theta$) に沿って原点に近づくとき, その直線の取り方によって異なる値になることを示している. このことから, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は存在しない.

次に極限值が存在する場合での利用例を紹介しよう. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3 + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$ の極限值を極座標変換を利用して調べる. 先ず, いくつかの方法で $(x,y) \rightarrow (0,0)$ としてみた結果 (例えば, $x \rightarrow 0$ の後で $y \rightarrow 0$ とするなど), どれも「2」に近づくことが観察される. このことから, 極限值は「2」であると推測する. この推測が正しいことは以下のように示すことができる.

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^3 - y^3 + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} - 2 \right| &= \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{r^3 \cos^3 \theta - r^3 \sin^3 \theta}{r^2} \right| = |r \cos^3 \theta - r \sin^3 \theta| \\ &\leq |r \cos^3 \theta| + |r \sin^3 \theta| \\ &\leq r + r = 2r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0) \end{aligned}$$

よって, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3 + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} = 2$ である.

(5)

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \log(x^2 + y^2) &= \lim_{r \rightarrow +0} r \log r^2 = \lim_{r \rightarrow +0} 2r \log r \\
&= \lim_{r \rightarrow +0} \frac{2 \log r}{\frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{\frac{2}{r}}{-\frac{1}{r^2}} \\
&= \lim_{r \rightarrow +0} (-2r) = 0
\end{aligned}$$

($\lim_{r \rightarrow +0} 2r \log r$ は $0 \times \infty$ 型の不定形の極限なので、ロピタルの定理を用いて計算している.)

(6) $\left| \sin \frac{1}{xy} \right| \leq 1$ であるので,

$$\left| xy \sin \frac{1}{xy} \right| \leq |xy|$$

である. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |xy| = 0$ であるので, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| xy \sin \frac{1}{xy} \right| = 0$,

すなわち, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin \frac{1}{xy} = 0$

5.3.1

(1) $f(0, 0) = 0$, $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = \log(1 + y)$ より,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

である. よって, $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で x に関して偏微分可能であり, その偏微分係数は $f_x(0, 0) = 0$ である.

次に,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1 + h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1 + h)}{h} = 1$$

である. よって, $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で y に関して偏微分可能であり, その偏微分係数は $f_y(0, 0) = 1$ である.

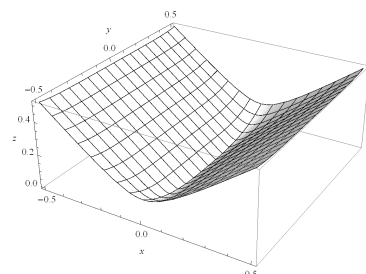
(2) $f(0, 0) = 0$, $f(x, 0) = |x|$, $f(0, y) = |y^3| = y^2|y|$ より,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

である. この極限值は存在しない (例題 2.3.3 (教科書 30 ページ) と同様に示すことができる) ので, $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で x に関して偏微分可能ではない.

次に,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h|h| = 0$$



$z = \sqrt{x^2 + y^6}$ のグラフ

である。よって、 $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で y に関して偏微分可能であり、その偏微分係数は $f_y(0, 0) = 0$ である。

(3) $f(0, 0) = 1$, $f(x, 0) = \sqrt{\sin^2 x + 1}$, $f(0, y) = |\cos y|$ より,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 h + 1} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\sin^2 h + 1} - 1)(\sqrt{\sin^2 h + 1} + 1)}{h(\sqrt{\sin^2 h + 1} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(\sqrt{\sin^2 h + 1} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h}{h} \right)^2 \cdot \frac{h}{\sqrt{\sin^2 h + 1} + 1} = 0 \end{aligned}$$

である。よって、 $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で x に関して偏微分可能であり、その偏微分係数は $f_x(0, 0) = 0$ である。

次に,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\cos h| - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(|\cos h| - 1)(|\cos h| + 1)}{h(|\cos h| + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(|\cos h| + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(|\cos h| + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h}{h} \right)^2 \cdot \frac{-h}{|\cos h| + 1} = 0 \end{aligned}$$

である。よって、 $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で y に関して偏微分可能であり、その偏微分係数は $f_y(0, 0) = 0$ である。

5.3.2

$f(x, y)$ を x に関して偏微分するためには、 y を (形式的に) 定数と考えて x で $f(x, y)$ を微分すればよい。また、 y に関して偏微分するためには、 x を (形式的に) 定数と考えて y で $f(x, y)$ を微分すればよい。この方針で計算すればよく、計算結果については、教科書の略解のとおりである。

5.4.1

(1) $f_x(x, y) = 3x^2 + y^2 + 4xy^3$, $f_y(x, y) = 2xy + 6x^2y^2$ であるので,

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = 6x + 4y^3 \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = 2y + 12xy^2 \\ f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = 2y + 12xy^2 \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = 2x + 12x^2y \end{aligned}$$

$(f_x(x, y), f_y(x, y))$ が連続であるので、 $f(x, y)$ は C^1 級である。よって、 $f_{xy} = f_{yx}$ が成立している。以下の (2) ~ (5) についても C^1 級であるので、 $f_{xy} = f_{yx}$ が成立している。

$$(2) f_x(x, y) = -\frac{y}{x^2}, f_y(x, y) = \frac{1}{x} \text{ であるので,}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = \frac{2y}{x^3}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = 0$$

$$(3) f_x(x, y) = 2e^{2x} \sin^2 y, f_y(x, y) = e^{2x} \sin 2y \text{ であるので,}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = 4e^{2x} \sin^2 y$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = 4e^{2x} \sin y \cos y = 2e^{2x} \sin 2y$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = 2e^{2x} \sin 2y$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = 2e^{2x} \cos 2y$$

$$(4) f_x(x, y) = -y^2 \sin(xy^2), f_y(x, y) = -2xy \sin(xy^2) \text{ であるので,}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = -y^4 \cos(xy^2)$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = -2y \sin(xy^2) - y^2 \times (\cos(xy^2) \times 2xy) \\ &= -2y \sin(xy^2) - 2xy^3 \cos(xy^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = -2y \sin(xy^2) - 2xy \times (\cos(xy^2) \times y^2) \\ &= -2y \sin(xy^2) - 2xy^3 \cos(xy^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = -2x \sin(xy^2) - 2xy \times (\cos(xy^2) \times 2xy) \\ &= -2x \sin(xy^2) - 4x^2 y^2 \cos(xy^2) \end{aligned}$$

$$(5) f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} \text{ であるので,}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \times 2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \times 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

5.5.1

(1) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$ を偏微分すると、偏導関数は $f_x(x, y) = 6x + 2y$, $f_y(x, y) = 2x - 2y$ である。これらは連続なので、 $f(x, y)$ は全微分可能である。また、点 $(1, 2)$ での偏微分係数は $f_x(1, 2) = 10$, $f_y(1, 2) = -2$ である。したがって、求める接平面の方程式は $z = f(1, 2) + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2)$ より、 $z = 3 + 10(x - 1) - 2(y - 2)$, すなわち、 $z = 10x - 2y - 3$ である。

(2) $f(x, y) = e^{3x+y}$ を偏微分すると、偏導関数は $f_x(x, y) = 3e^{3x+y}$, $f_y(x, y) = e^{3x+y}$ である。これらは連続なので、 $f(x, y)$ は全微分可能である。また、点 $(1, -3)$ での偏微分係数は $f_x(1, -3) = 3$, $f_y(1, -3) = 1$ である。したがって、求める接平面の方程式は $z = f(1, -3) + f_x(1, -3)(x - 1) + f_y(1, -3)(y + 3)$ より、 $z = 1 + 3(x - 1) + (y + 3)$, すなわち、 $z = 3x + y + 1$ である。

(3) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ を偏微分すると、偏導関数は $f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, $f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ である。これらは $x^2 + y^2 < 4$ で連続なので、 $f(x, y)$ は全微分可能である。また、点 $(1, 1)$ での偏微分係数は $f_x(1, 1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_y(1, 1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。したがって、求める接平面の方程式は $z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1)$ より、 $z = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 1)$, すなわち、 $z = \frac{4 - x - y}{\sqrt{2}}$ である。

5.5.2

(1) $x = t \cos t$, $y = t \sin t$ を代入して、 $z = t \cos t e^{t \sin t}$ を t で微分して $\frac{dz}{dt}$ を計算することができるが、合成関数の微分法 (定理 5.5.3) (教科書 114 ページ) を利用して求めよう。
 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x e^y$ である。また、 $\frac{t}{dt}(t \cos t) = \cos t - t \sin t$, $\frac{t}{dt}(t \sin t) = \sin t + t \cos t$ である。よって、合成関数の微分法により、

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= e^{t \sin t} (\cos t - t \sin t) + t \cos t e^{t \sin t} (\sin t + t \cos t) \\ &= e^{t \sin t} (\cos t - t \sin t + t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t) \end{aligned}$$

(2) $\frac{t}{dt}(e^{-t}) = -e^{-t}$, $\frac{t}{dt}(e^{2t}) = 2e^{2t}$ である。よって、合成関数の微分法により、

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= f_x(e^{-t}, e^{2t})(-e^{-t}) + f_y(e^{-t}, e^{2t}) \cdot 2e^{2t} \\ &= -f_x(e^{-t}, e^{2t})e^{-t} + 2f_y(e^{-t}, e^{2t})e^{2t} \end{aligned}$$

5.5.3

(1) $x = s - t$, $y = st$ を代入して、 $z = e^{s-t} \cos(st)$ を s, t で偏微分して $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ を計算することができるが、連鎖律 (定理 5.5.4) (教科書 115 ページ) を利用して求めよう。

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= e^x \cos y, & \frac{\partial z}{\partial y} &= -e^x \sin y \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= 1, & \frac{\partial x}{\partial t} &= -1 \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= t, & \frac{\partial y}{\partial t} &= s\end{aligned}$$

であるので、連鎖律により、

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= e^{s-t} \cos(st) \cdot 1 - e^{s-t} \sin(st) \cdot t = e^{s-t} (\cos(st) - t \sin(st)) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= e^{s-t} \cos(st) \cdot (-1) - e^{s-t} \sin(st) \cdot s = -e^{s-t} (\cos(st) + s \sin(st))\end{aligned}$$

(2) $\frac{\partial x}{\partial s} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial t} = 2$, $\frac{\partial y}{\partial s} = 3$, $\frac{\partial y}{\partial t} = 1$ である。よって、連鎖律により、

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= f_x(s+2t, 3s+t) \cdot 1 + f_y(s+2t, 3s+t) \cdot 3 = f_x(s+2t, 3s+t) + 3f_y(s+2t, 3s+t) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= f_x(s+2t, 3s+t) \cdot 2 + f_y(s+2t, 3s+t) \cdot 1 = 2f_x(s+2t, 3s+t) + f_y(s+2t, 3s+t)\end{aligned}$$

5.5.4

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \theta, & \frac{\partial f}{\partial y} &= -\sin \theta \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= \sin \theta, & \frac{\partial g}{\partial y} &= \cos \theta \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2}\end{aligned}$$

であるので、連鎖律を利用すると、

$$\begin{aligned}f_u(u, v) + g_v(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \cos \theta \cdot \left(-\frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} \right) - \sin \theta \cdot \left(-\frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2} \right) + \sin \theta \cdot \left(-\frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2} \right) + \cos \theta \cdot \left(\frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

5.5.5

$f(u, v) = \log r = \frac{1}{2} \log(u^2 + v^2)$ であるので,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{u}{u^2 + v^2}, & \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{v}{u^2 + v^2} \\ f_{uu}(u, v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{u^2 + v^2} \right) = -\frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} \\ f_{vv}(u, v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v}{u^2 + v^2} \right) = \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

よって,

$$f_{uu}(u, v)(u, v) + f_{vv}(u, v) = -\frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} = 0$$

(注意) 微分作用素 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ をラプラシアンといい, $\Delta f = 0$ を満たす関数 $f(x, y)$ を調和関数という. この問題からわかるように, $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ は調和関数である.

5.5.6

連鎖律により,

$$\begin{aligned} z_\theta &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \theta) \\ &= z_x(-y) + z_y x = xz_y - yz_x \end{aligned}$$

5.6.1

C^3 級関数 $f(x, y)$ の原点における 2 次の近似多項式 $P_2(x - 0, y - 0)$ は

$$\begin{aligned} P_2(x - 0, y - 0) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (f_{xx}(0, 0)(x - 0)^2 + 2f_{xy}(0, 0)(x - 0)(y - 0) + f_{yy}(0, 0)(y - 0)^2) \\ &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2!} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) \end{aligned}$$

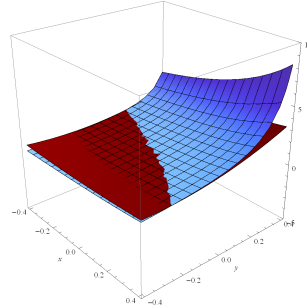
を計算すればよい.

(1) $f(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-2y)}$ は原点の近くで C^3 級であり,

	$f(0, 0) = 1$
$f_x(x, y) = \frac{1}{(1-x)^2(1-2y)}$	$f_x(0, 0) = 1$
$f_y(x, y) = \frac{2}{(1-x)(1-2y)^2}$	$f_y(0, 0) = 2$
$f_{xx}(x, y) = \frac{2}{(1-x)^3(1-2y)}$	$f_{xx}(0, 0) = 2$
$f_{xy}(x, y) = \frac{2}{(1-x)^2(1-2y)^2}$	$f_{xy}(0, 0) = 2$
$f_{yy}(x, y) = \frac{8}{(1-x)(1-2y)^3}$	$f_{yy}(0, 0) = 8$

よって、2次の近似多項式は

$$P_2(x, y) = 1 + x + 2y + x^2 + 2xy + 4y^2$$



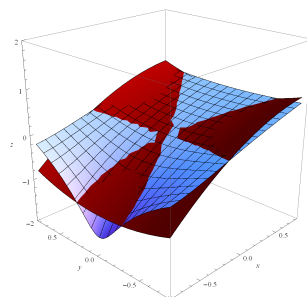
原点近くの $z = f(x, y)$ と $z = P_2(x, y)$ のグラフ
(メッシュ (網目線) 有りが $z = f(x, y)$ のグラフ)

(2) $f(x, y) = \log \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ は原点の近くで C^3 級であり,

	$f(0, 0) = 0$
$f_x(x, y) = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}$	$f_x(0, 0) = 1$
$f_y(x, y) = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$	$f_y(0, 0) = 0$
$f_{xx}(x, y) = -\frac{(x+y+1)(x-y+1)}{((x+1)^2 + y^2)^2}$	$f_{xx}(0, 0) = -1$
$f_{xy}(x, y) = -\frac{2(x+1)y}{((x+1)^2 + y^2)^2}$	$f_{xy}(0, 0) = 0$
$f_{yy}(x, y) = \frac{(x+y+1)(x-y+1)}{((x+1)^2 + y^2)^2}$	$f_{yy}(0, 0) = 1$

よって、2次の近似多項式は

$$P_2(x, y) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$



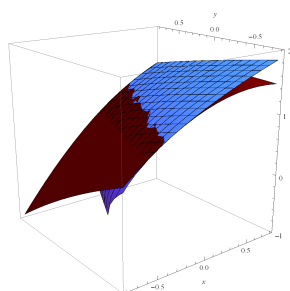
原点近くの $z = f(x, y)$ と $z = P_2(x, y)$ のグラフ

(3) $f(x, y) = \sqrt{1 + 2x - y}$ は原点の近くで C^3 級であり,

	$f(0, 0) = 1$
$f_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x - y}}$	$f_x(0, 0) = 1$
$f_y(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{1 + 2x - y}}$	$f_y(0, 0) = -\frac{1}{2}$
$f_{xx}(x, y) = -\frac{1}{(1 + 2x - y)^{\frac{3}{2}}}$	$f_{xx}(0, 0) = -1$
$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2(1 + 2x - y)^{\frac{3}{2}}}$	$f_{xy}(0, 0) = \frac{1}{2}$
$f_{yy}(x, y) = -\frac{1}{4(1 + 2x - y)^{\frac{3}{2}}}$	$f_{yy}(0, 0) = -\frac{1}{4}$

よって, 2 次の近似多項式は

$$P_2(x, y) = 1 + x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{8}y^2$$



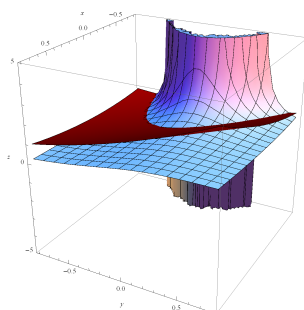
原点近くの $z = f(x, y)$ と $z = P_2(x, y)$ のグラフ

(4) $f(x, y) = \frac{e^{x+y}}{1 + 2x + 3y^2}$ は原点の近くで C^3 級であり,

	$f(0, 0) = 1$
$f_x(x, y) = \frac{(3y^2 + 2x - 1)e^{x+y}}{(1 + 2x + 3y^2)^2}$	$f_x(0, 0) = -1$
$f_y(x, y) = \frac{(3y^2 + 2x - 6y + 1)e^{x+y}}{(1 + 2x + 3y^2)^2}$	$f_y(0, 0) = 1$
$f_{xx}(x, y) = \frac{(9y^4 + 12xy^2 + 4x^2 - 6y^2 - 4x + 5)e^{x+y}}{(1 + 2x + 3y^2)^3}$	$f_{xx}(0, 0) = 5$
$f_{xy}(x, y) = \frac{(9y^4 - 18y^3 + 12xy^2 + 4x^2 - 12xy + 18y - 1)e^{x+y}}{(1 + 2x + 3y^2)^3}$	$f_{xy}(0, 0) = -1$
$f_{yy}(x, y) = \frac{(9y^4 - 36y^3 + 12xy^2 + 4x^2 - 24xy + 60y^2 - 8x - 12y - 5)e^{x+y}}{(1 + 2x + 3y^2)^3}$	$f_{yy}(0, 0) = -5$

よって、2次の近似多項式は

$$P_2(x, y) = 1 - x + y - \frac{5}{2}x^2 - xy - \frac{5}{2}y^2$$



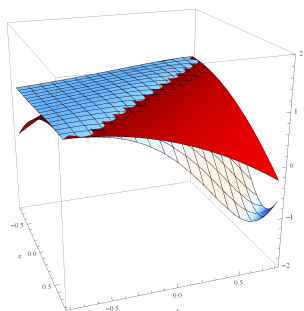
原点近くの $z = f(x, y)$ と $z = P_2(x, y)$ のグラフ

(5) $f(x, y) = \cos(e^{x+y} - 1)$ は原点の近くで C^3 級であり、

	$f(0, 0) = 1$
$f_x(x, y) = -e^{x+y} \sin(e^{x+y} - 1)$	$f_x(0, 0) = 0$
$f_y(x, y) = -e^{x+y} \sin(e^{x+y} - 1)$	$f_y(0, 0) = 0$
$f_{xx}(x, y) = -e^{x+y}(\sin(e^{x+y} - 1) + e^{x+y} \cos(e^{x+y} - 1))$	$f_{xx}(0, 0) = -1$
$f_{xy}(x, y) = -e^{x+y}(\sin(e^{x+y} - 1) + e^{x+y} \cos(e^{x+y} - 1))$	$f_{xy}(0, 0) = -1$
$f_{yy}(x, y) = -e^{x+y}(\sin(e^{x+y} - 1) + e^{x+y} \cos(e^{x+y} - 1))$	$f_{yy}(0, 0) = -1$

よって、2次の近似多項式は

$$P_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2)$$



原点近くの $z = f(x, y)$ と $z = P_2(x, y)$ のグラフ

極値問題 (定理 5.7.2, 定理 5.7.3) の補足説明

線形代数学で学ぶ「実対称行列の対角化」「2次形式の標準形」(教科書「理工系学生のための線形代数-Webアシスト演習付き- 培風館 122 ページ) を利用すると、定理 5.7.2, 定理 5.7.3 を次のように説明することができる。(ただし、以下の説明は、厳密性に欠ける議論であるので、証明になっていないことに注意していただきたい。)

関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) のまわりで C^2 級であり, 点 (a, b) は関数 $f(x, y)$ の停留点であるとする. $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ であるので, 点 (a, b) のまわりでのテイラーの定理を適用すると,

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= \frac{1}{2} (f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2) \\ &\quad + R_3(x-a, y-b) \\ &= \frac{1}{2} (f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2) + R_3(h, k) \end{aligned}$$

(ただし, $R_3(h, k)$ は剰余項である.) $|h|, |k|$ が十分に小さいとき, $f(x, y) - f(a, b)$ の正負は, $f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$ の正負によって決定されると考えてよい.

ところで, $f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$ は, h, k についての2次形式であり, 関数 $f(x, y)$ のヘッセ行列

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

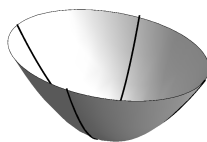
を用いると,

$$f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

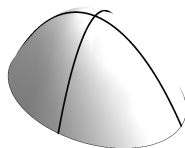
である. 関数 $f(x, y)$ は C^1 級でもあるので, ヘッセ行列 H は実対称行列である. よって, ある直交行列 P を用いて ${}^tPHP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ と対角化することができる. $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned} f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \lambda u^2 + \mu v^2 \end{aligned}$$

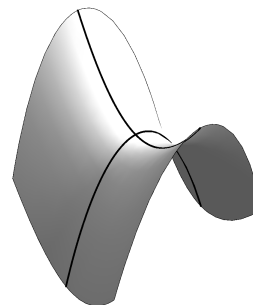
となる. $\lambda u^2 + \mu v^2$ が原点以外のところで, 正になるか負になるかは, λ, μ の符号により決まる.



(i) $\lambda > 0, \mu > 0$



(ii) $\lambda < 0, \mu < 0$



(iii) $\lambda\mu < 0$

$z = \lambda u^2 + \mu v^2$ のグラフ

ここで,

$$f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \{f_{xy}(a, b)\}^2 = \det H = \lambda\mu$$

$$f_{xx}(a, b) + f_{yy}(a, b) = \operatorname{tr}H = \lambda + \mu$$

$$f_{xx}(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に注意すると,

$$\lambda > 0, \mu > 0 \iff \det H > 0, f_{xx}(a, b) > 0$$

$$\lambda < 0, \mu < 0 \iff \det H > 0, f_{xx}(a, b) < 0$$

であることがわかる. よって, $z = \lambda u^2 + \mu v^2$ のグラフからわかるように

$$\det H > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \iff \text{原点以外のところで } z = \lambda u^2 + \mu v^2 > 0$$

$$\det H > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \iff \text{原点以外のところで } z = \lambda u^2 + \mu v^2 < 0$$

$$\det H < 0 \iff z = \lambda u^2 + \mu v^2 \text{ の正負は決まらない}$$

このことから, 定理 5.7.2 が成立することがわかる. また, 同様の理由により, 3 変数以上の関数についても, ヘッセ行列の固有値を用いた条件を使って極値をとるかどうかを判定することができる (定理 5.7.3).

さて, 演習問題 5.7.1 のような極値問題を解くには, 定理 5.7.2 を用いて例題 5.7.1 のように実行すればよい. その手順をまとめると,

- ① : 関数 $f(x, y)$ の停留点を求めるために, 連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

を解く.

- ② : 求めた停留点 (a, b) について, ヘッセ行列式 $H(a, b)$ や $f_{xx}(a, b)$ の正負を判定し, 定理 5.7.2 を用いて極値をとるかどうかを判断する

$H(a, b) = 0$ を満たす停留点 (a, b) に関する注意

教科書 121 ページでも注意しているように, $H(a, b) = 0$ である停留点 (a, b) については, 定理 5.7.2 を用いることができず, 別の方法で調べる必要がある. その方法の 2 例を次にあげる.

例 1 : 関数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$ の極値を調べる.

$$f_x(x, y) = 2x(1 - x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2},$$

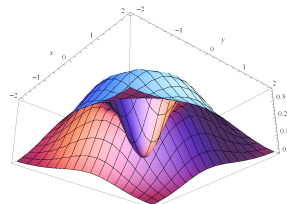
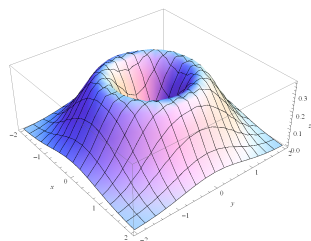
$$f_y(x, y) = 2y(1 - x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$$

$$f_{xx}(x, y) = 2(2x^4 + x^2(2y^2 - 5) - y^2 + 1)e^{-x^2 - y^2},$$

$$f_{xy}(x, y) = 4xy(x^2 + y^2 - 2)e^{-x^2 - y^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = 2(2y^4 + y^2(2x^2 - 5) - x^2 + 1)e^{-x^2 - y^2}$$

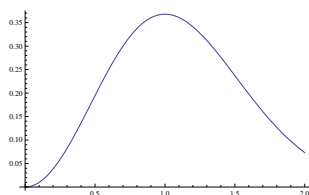
であるので、停留点は原点 $(0, 0)$ か円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点である。



$z = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$ のグラフ（「上から」見たものと「下から」見上げたもの）

定理 5.7.2 を用いることで、原点で極小値をとることがわかる。一方、円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点について、計算により $H(x, y) = 0$ であることがわかる。例えば、円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある停留点 $(1, 0)$ に対しては定理 5.7.2 を用いることはできない。そこで、点 $(1, 0)$ の近くの状況を 2 つの方法で調べる。1 つは円周 $x^2 + y^2 = 1$ に沿って調べる方法 (i)，もう 1 つは x 軸に沿って調べる方法 (ii) である。

(i) の場合、円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上では常に $f(x, y) = \frac{1}{e} = f(1, 0)$ となる。一方、(ii) の場合、 $f(x, 0) = x^2 e^{-x^2}$ であり、このグラフから、 x 軸上では $f(x, 0) < f(1, 0)$ である。このことから、停留点 $(1, 0)$ では極値をとらないことがわかる。円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上の他の点でも同様の方法で極値をとらないことがわかる。



$z = x^2 e^{-x^2}$ のグラフ

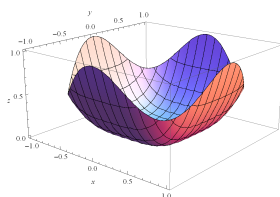
例 2 : $f(x, y) = x^4 + y^4$ の極値について調べる。

$$f_x(x, y) = 4x^3, \quad f_y(x, y) = 4y^3$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2, \quad f_{xy}(x, y) = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = 12y^2$$

であるので、停留点は原点 $(0, 0)$ のみである。



$z = x^4 + y^4$ のグラフ

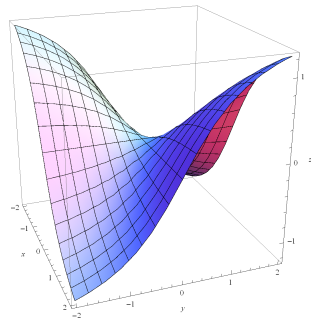
原点について、計算により $H(x, y) = 0$ であることがわかる. 十分に原点に近い点 (h, k) (例えば, $0 < h^2 + k^2 < 1$ を満たす点) について, 明らかに,

$$f(h, k) > 0 = f(0, 0)$$

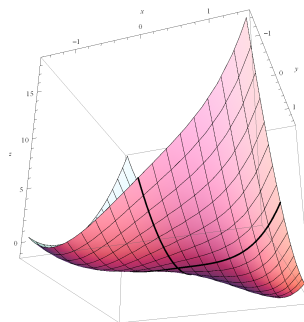
が成立するので, 関数 $f(x, y) = x^4 + y^4$ は原点で極小値 $f(0, 0) = 0$ をとる.

5.7.1

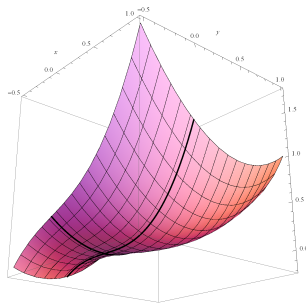
次のグラフは (1) ~ (8) の関数の停留点近くのグラフである.



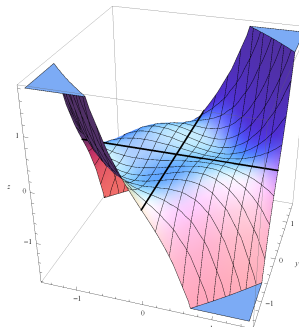
(1) $z = \tan^{-1} x \tan^{-1} y$



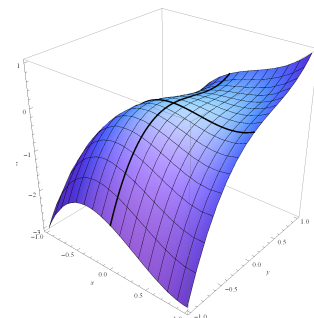
(2) $z = x^4 - 4xy + 2y^2$



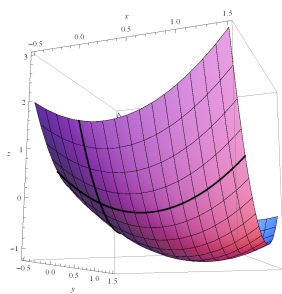
(3) $z = x^3 + y^2 - xy$



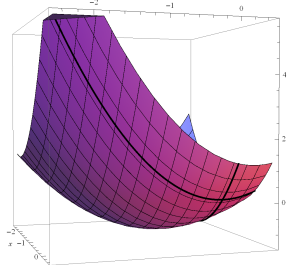
(4) $z = x^3y + xy^3 - xy$



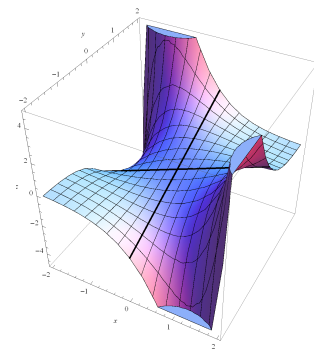
(5) $z = x^3 + y^3 - x^2 + xy - y^2$



(6) $z = x^2 - xy + 2y^2 - x - 2y$



(7) $z = x^2 + 2x - xy + y^2$



(8) $z = (x + y)e^{-xy}$

((2), (3), (6), (7) のグラフは「下から見上げた」ものになっている)

(1) $f(x, y) = \tan^{-1} x \tan^{-1} y$ について,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\tan^{-1} y}{1+x^2}, & f_y(x, y) &= \frac{\tan^{-1} x}{1+y^2} \\ f_{xx}(x, y) &= -\frac{2x \tan^{-1} y}{(1+x^2)^2}, & f_{yy}(x, y) &= -\frac{2y \tan^{-1} x}{(1+y^2)^2} \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \end{aligned}$$

である.

①: 停留点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} \frac{\tan^{-1} y}{1+x^2} = 0 \\ \frac{\tan^{-1} x}{1+y^2} = 0 \end{cases}$$

を解くと, 点 $(x, y) = (0, 0)$ が停留点である.

②: ヘッセ行列式 $H(a, b)$ を用いて各停留点での極値の判定を行う.

$$H(0, 0) = 0 \times 0 - 1^2 = -1$$

である. $H(0, 0) < 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で極値をとらない.

(2) $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$ について,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4x^3 - 4y, & f_y(x, y) &= -4x + 4y \\ f_{xx}(x, y) &= 12x^2, & f_{yy}(x, y) &= 4 \\ f_{xy}(x, y) &= -4 \end{aligned}$$

である.

①: 停留点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases}$$

を解くと, 点 $(x, y) = (0, 0), (\pm 1, \pm 1)$ (複号同順) が停留点である.

②: ヘッセ行列式 $H(a, b)$ を用いて各停留点での極値の判定を行う.

$$H(0, 0) = 0 \times 4 - (-4)^2 = -16$$

である. $H(0, 0) < 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で極値をとらない.

$$H(\pm 1, \pm 1) = 12 \times 4 - (-4)^2 = 32$$

である. $H(\pm 1, \pm 1) > 0$ かつ $f_{xx}(\pm 1, \pm 1) = 12 > 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(\pm 1, \pm 1)$ で極小値 $f(\pm 1, \pm 1) = -1$ をとる.

(3) $f(x, y) = x^3 + y^2 - xy$ について,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 - y, & f_y(x, y) &= 2y - x \\ f_{xx}(x, y) &= 6x, & f_{yy}(x, y) &= 2 \\ f_{xy}(x, y) &= -1 \end{aligned}$$

である.

①: 停留点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$$

を解くと, 点 $(x, y) = (0, 0), (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ が停留点である.

②: ヘッセ行列式 $H(a, b)$ を用いて各停留点での極値の判定を行う.

$$H(0, 0) = 0 \times 2 - (-1)^2 = -1$$

である. $H(0, 0) < 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で極値をとらない.

$$H(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = 1 \times 2 - (-1)^2 = 1$$

である. $H(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) > 0$ かつ $f_{xx}(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = 1 > 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ で極小値 $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{432}$ をとる.

(4) $f(x, y) = x^3y + xy^3 - xy$ について,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2y + y^3 - y, & f_y(x, y) &= x^3 + 3xy^2 - x \\ f_{xx}(x, y) &= 6xy, & f_{yy}(x, y) &= 6xy \\ f_{xy}(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 - 1 \end{aligned}$$

である.

①: 停留点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} 3x^2y + y^3 - y = 0 \\ x^3 + 3xy^2 - x = 0 \end{cases}$$

を解くと, 点 $(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}), (\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2})$ (複号同順) が停留点である.

②: ヘッセ行列式 $H(a, b)$ を用いて各停留点での極値の判定を行う.

$$H(0, 0) = 0 \times 0 - (-1)^2 = -1$$

である. $H(0, 0) < 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で極値をとらない.

$$H(\pm 1, 0) = 0 \times 0 - 2^2 = -4$$

である. $H(\pm 1, 0) < 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(\pm 1, 0)$ で極値をとらない.

$$H(0, \pm 1) = 0 \times 0 - 2^2 = -4$$

である. $H(0, \pm 1) < 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(0, \pm 1)$ で極値をとらない.

$$H(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

である. $H(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}) > 0$ かつ $f_{xx}(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} > 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ で極小値 $f(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$ をとる.

$$H(\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

である. $H(\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}) > 0$ かつ $f_{xx}(\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} < 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2})$ で極大値 $f(\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$ をとる.

(5) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + xy - y^2$ について,

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 2x + y, \quad f_y(x, y) = 3y^2 + x - 2y$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 2, \quad f_{yy}(x, y) = 6y - 2$$

$$f_{xy}(x, y) = 1$$

である.

①: 停留点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + y = 0 \\ 3y^2 + x - 2y = 0 \end{cases}$$

を解くと, 点 $(x, y) = (0, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ が停留点である.

②: ヘッセ行列式 $H(a, b)$ を用いて各停留点での極値の判定を行う.

$$H(0, 0) = (-2) \times (-2) - 1^2 = 3$$

である. $H(0, 0) > 0$ かつ $f_{xx}(0, 0) = -2 < 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で極大値 $f(0, 0) = 0$ をとる.

$$H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 0 \times 0 - 1^2 = -1$$

である. $H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) < 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ で極値をとらない.

(6) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - x - 2y$ について,

$$f_x(x, y) = 2x - y - 1, \quad f_y(x, y) = -x + 4y - 2$$

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 4$$

$$f_{xy}(x, y) = -1$$

である.

①: 停留点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

を解くと, 点 $(x, y) = (\frac{6}{7}, \frac{5}{7})$ が停留点である.

②: ヘッセ行列式 $H(a, b)$ を用いて各停留点での極値の判定を行う.

$$H(\frac{6}{7}, \frac{5}{7}) = 2 \times 4 - (-1)^2 = 7$$

である. $H(\frac{6}{7}, \frac{5}{7}) > 0$ かつ $f_{xx}(\frac{6}{7}, \frac{5}{7}) = 2 > 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(\frac{6}{7}, \frac{5}{7})$ で極小値 $f(\frac{6}{7}, \frac{5}{7}) = -\frac{8}{7}$ をとる.

(7) $f(x, y) = x^2 + 2x - xy + y^2$ について,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x + 2 - y, & f_y(x, y) &= -x + 2y \\ f_{xx}(x, y) &= 2, & f_{yy}(x, y) &= 2 \\ f_{xy}(x, y) &= -1 \end{aligned}$$

である.

①: 停留点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} 2x + 2 - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

を解くと, 点 $(x, y) = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ が停留点である.

②: ヘッセ行列式 $H(a, b)$ を用いて各停留点での極値の判定を行う.

$$H(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) = 2 \times 2 - (-1)^2 = 3$$

である. $H(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) > 0$ かつ $f_{xx}(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) = 2 > 0$ より, $f(x, y)$ は点 $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ で極小値 $f(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$ をとる.

(8) $f(x, y) = (x + y)e^{-xy}$ について,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (1 - xy - y^2)e^{-xy}, & f_y(x, y) &= (1 - xy - x^2)e^{-xy} \\ f_{xx}(x, y) &= y(y^2 + xy - 2)e^{-xy}, & f_{yy}(x, y) &= x(x^2 + xy - 2)e^{-xy} \\ f_{xy}(x, y) &= (x^2y + xy^2 - 2x - 2y)e^{-xy} \end{aligned}$$

である.

①：停留点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} (1 - xy - y^2)e^{-xy} = 0 \\ (1 - xy - x^2)e^{-xy} = 0 \end{cases}$$

を解くと、点 $(x, y) = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ (複号同順) が停留点である。

②：ヘッセ行列式 $H(a, b)$ を用いて各停留点での極値の判定を行う。

$$H(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \left(\mp \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \times \left(\mp \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) - \left(\mp \frac{3}{\sqrt{2e}}\right)^2 = -\frac{4}{e}$$

である。 $H(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$ より、 $f(x, y)$ は点 $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ で極値をとらない。

(9) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ について、

$$f_x(x, y) = -\frac{1}{x^2} + y, \quad f_y(x, y) = x - \frac{1}{y^2}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2}{x^3}, \quad f_{yy}(x, y) = \frac{2}{y^3}$$

$$f_{xy}(x, y) = 1$$

である。

①：停留点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^2} + y = 0 \\ x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

を解くと、点 $(x, y) = (1, 1)$ が停留点である。

②：ヘッセ行列式 $H(a, b)$ を用いて各停留点での極値の判定を行う。

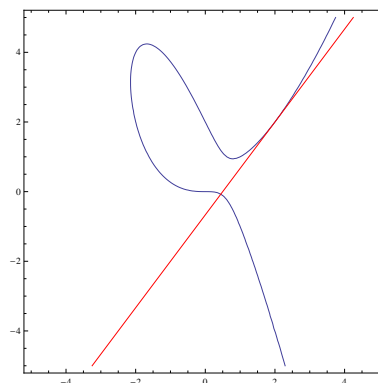
$$H(1, 1) = 2 \times 2 - 1^2 = 3$$

である。 $H(1, 1) > 0$ かつ $f_{xx}(1, 1) = 2 > 0$ より、 $f(x, y)$ は点 $(1, 1)$ で極小値 $f(1, 1) = 3$ をとる。

5.8.1

(1) $f_x(x, y) = 3x^2 - 2y$, $f_y(x, y) = -2y - 2x + 2$ である。 $f(2, 2) = 0$ かつ $f_y(2, 2) = -6 \neq 0$ であるので、 $x = 2$ のまわりで $f(x, y) = 0$ により定まる陰関数 y がただ一つ存在する。陰関数 y に対して $f(x, y)$ を x で微分すると、

$$f_x(x, y) + f_y(x, y)y' = (3x^2 - 2y) + (-2y - 2x + 2)y'$$



曲線 $x^3 - y^2 - 2xy + 2y = 0$ と接線

であるので、 $f(x, y) = 0$ の両辺を x で微分すると、

$$(3x^2 - 2y) + (-2y - 2x + 2)y' = 0$$

である。よって、点 $(2, 2)$ において、 $y'(2) = \frac{4}{3}$ である。また、接線の方程式は $y = \frac{4}{3}(x - 2) + 2 = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ である。

(2) $f_x(x, y) = 4x^3 - 8x$, $f_y(x, y) = 8y$ である。
 $f(1, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$ かつ $f_y(1, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 4\sqrt{3} \neq 0$ である
 ので、 $x = 1$ のまわりで $f(x, y) = 0$ により定まる陰
 関数 y がただ一つ存在する。陰関数 y に対して $f(x, y)$
 を x で微分すると、

$$f_x(x, y) + f_y(x, y)y' = (4x^3 - 8x) + 8yy'$$

であるので、 $f(x, y) = 0$ の両辺を x で微分すると、

$$(4x^3 - 8x) + 8yy' = 0$$

である。よって、点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ において、 $y'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。また、接線の方程式は $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}}{6}$ である。

(3) $f_x(x, y) = 2e^{2x-y} + 1$, $f_y(x, y) = -e^{2x-y} - 1$ である。 $f(1, 2) = 0$ かつ $f_y(1, 2) = -2 \neq 0$ であるので、 $x = 1$ のまわりで $f(x, y) = 0$ により定まる陰関数 y がただ一つ存在する。陰関数 y に対して $f(x, y)$ を x で微分すると、

$$f_x(x, y) + f_y(x, y)y' = (2e^{2x-y} + 1) + (-e^{2x-y} - 1)y'$$

であるので、 $f(x, y) = 0$ の両辺を x で微分すると、

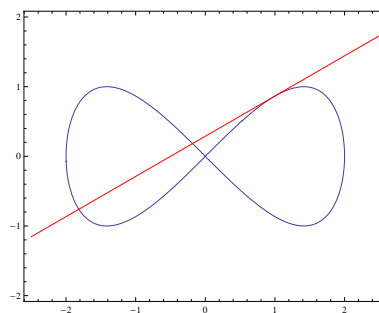
$$(2e^{2x-y} + 1) + (-e^{2x-y} - 1)y' = 0$$

である。よって、点 $(1, 2)$ において、 $y'(1) = \frac{3}{2}$ である。また、接線の方程式は $y = \frac{3}{2}(x - 1) + 2 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ である。

5.8.2

(1) $f_x(x, y, z) = 2x$, $f_y(x, y, z) = 2y$, $f_z(x, y, z) = 2z$ である。 $f(1, 1, \sqrt{2}) = 0$ かつ $f_z(1, 1, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \neq 0$ であるので、点 $(1, 1)$ のまわりで $f(x, y, z) = 0$ により定まる陰関数 z がただ一つ存在する。陰関数 z に対して $f(x, y, z)$ を x と y でそれぞれ微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= f_x(x, y, z) + f_z(x, y, z)z_x = 2x + 2zz_x \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= f_y(x, y, z) + f_z(x, y, z)z_y = 2y + 2zz_y \end{aligned}$$



曲線 $x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$ と接線

であるので、 $f(x, y, z) = 0$ の両辺を x と y でそれぞれ微分すると、

$$2x + 2zz_x = 0, \quad 2y + 2zz_y = 0$$

である。これより、

$$z_x = -\frac{x}{z}, \quad z_y = -\frac{y}{z}$$

を得る。よって、点 $(1, 1, \sqrt{2})$ において、 $z_x(1, 1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z_y(1, 1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。また、接平面の方程式は

$$z = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 2\sqrt{2}$$

(2) $f_x(x, y, z) = 2x + 2y + 2z$, $f_y(x, y, z) = 2x - 3z$, $f_z(x, y, z) = 2x - 3y - 2z$ である。 $f(1, 2, 1) = 0$ かつ $f_z(1, 2, 1) = -6 \neq 0$ であるので、点 $(1, 2)$ のまわりで $f(x, y, z) = 0$ により定まる陰関数 z がただ一つ存在する。陰関数 z に対して $f(x, y, z)$ を x と y でそれぞれ微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= f_x(x, y, z) + f_z(x, y, z)z_x = (2x + 2y + 2z) + (2x - 3y - 2z)z_x \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= f_y(x, y, z) + f_z(x, y, z)z_y = (2x - 3z) + (2x - 3y - 2z)z_y \end{aligned}$$

であるので、 $f(x, y, z) = 0$ の両辺を x と y でそれぞれ微分すると、

$$(2x + 2y + 2z) + (2x - 3y - 2z)z_x = 0, \quad (2x - 3z) + (2x - 3y - 2z)z_y = 0$$

である。これより、

$$z_x = -\frac{2(x+y+z)}{2x-3y-2z}, \quad z_y = -\frac{2x-3z}{2x-3y-2z}$$

を得る。よって、点 $(1, 2, 1)$ において、 $z_x(1, 2) = \frac{4}{3}$, $z_y(1, 2) = -\frac{1}{6}$ である。また、接平面の方程式は

$$z = 1 + \frac{4}{3}(x-1) - \frac{1}{6}(y-2) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{6}y$$

(3) $f_x(x, y, z) = \cos(x+z)$, $f_y(x, y, z) = -z \sin(yz)$, $f_z(x, y, z) = \cos(x+z) - y \sin(yz)$ である。 $f(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\pi}{2}) = 0$ かつ $f_z(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\pi}{2}) = -\frac{7\sqrt{3}}{6} \neq 0$ であるので、点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3})$ のまわりで $f(x, y, z) = 0$ により定まる陰関数 z がただ一つ存在する。陰関数 z に対して $f(x, y, z)$ を x と y でそれぞれ微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= f_x(x, y, z) + f_z(x, y, z)z_x = \cos(x+z) + (\cos(x+z) - y \sin(yz))z_x \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= f_y(x, y, z) + f_z(x, y, z)z_y = -z \sin(yz) + (\cos(x+z) - y \sin(yz))z_y \end{aligned}$$

であるので, $f(x, y, z) = 0$ の両辺を x と y でそれぞれ微分すると,

$$\cos(x+z) + (\cos(x+z) - y \sin(yz))z_x = 0, \quad -z \sin(yz) + (\cos(x+z) - y \sin(yz))z_y = 0$$

である. これより,

$$z_x = -\frac{\cos(x+z)}{\cos(x+z) - y \sin(yz)}, \quad z_y = \frac{z \sin(yz)}{\cos(x+z) - y \sin(yz)}$$

を得る. よって, 点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\pi}{2})$ において, $z_x(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}) = -\frac{3}{7}$, $z_y(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}) = -\frac{3\pi}{14}$ である. また, 接平面の方程式は

$$z = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{7}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{3\pi}{14}\pi(y - \frac{4}{3}) = -\frac{3}{7}x - \frac{3\pi}{14}y + \frac{13\pi}{14}$$

5.9.1

条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の最大値・最小値問題:

関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ は C^1 級とする. このとき, 条件 $g(a, b) = 0$ を満たす点 (a, b) で関数 $f(x, y)$ が最大値または最小値をとるならば, 以下の (i) ~ (iii) のいずれかが成立することがわかっている:

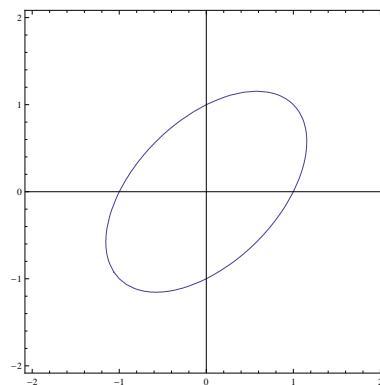
- (i) 点 (a, b) は曲線 $g(x, y) = 0$ の特異点である,
- (ii) 点 (a, b) で関数 $f(x, y)$ は極値をとる,
- (iii) 点 (a, b) は曲線 $g(x, y) = 0$ の境界 (すなわち, 端点) か関数 $f(x, y)$ の定義域 D の境界点である.

上記の (i), (iii) 以外の曲線 $g(x, y) = 0$ が有界であれば, 条件 $g(x, y) = 0$ での最大値・最小値を求める問題解決は, 教科書 126 ページのように, ラグランジュの未定乗数法を用いた極値をとる点の候補を探索することから始まる.

(1) 関数 $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1$ について, $g_x(x, y) = 2x - y$, $g_y(x, y) = -x + 2y$ である. 連立方程式

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 0 \\ g_y(x, y) = 0 \end{cases}, \quad \text{すなわち, } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

の解は $x = y = 0$ であるが, これは $g(x, y) = 0$ を満たさない. よって, 曲線 $g(x, y) = 0$ は特異点をもたない. また, 曲線 $g(x, y) = 0$ は右図のような楕円であり, 有界閉集合である. よって, 定理 5.2.3 により, 問題の関数は条件 $g(x, y) = 0$ のもとで最大値・最小値をもち, それらは条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の極値をとる点である.



曲線 $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$

次に, ラグランジュの未定乗数法を用いて, 条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の極値をとる点を探す.

$f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 2y$ である. 連立方程式

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0, \\ f_y + \lambda g_y = 0, \\ g = 0 \end{cases}, \text{ すなわち, } \begin{cases} 2x + \lambda(2x - y) = 0, \\ 2y + \lambda(-x + 2y) = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

について, 最初の 2 つの方程式は行列を用いて,

$$\begin{pmatrix} 2x & 2x - y \\ 2y & -x + 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる. 行列 $\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$ を係数行列とする連立方程式 $\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が非自明な解 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ をもつので, 係数行列 $\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$ は正則ではない.

よって, $\begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = 0$, すなわち,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2x & 2x - y \\ 2y & -x + 2y \end{vmatrix} = -2x^2 + 2y^2 \\ &= -2(x - y)(x + y) = 0 \end{aligned}$$

でなければならない. したがって, $y = \pm x$ である.

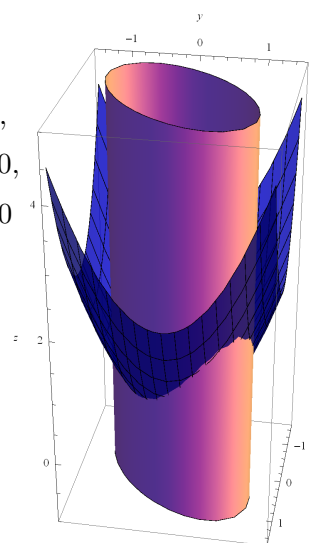
$y = x$ のとき, $g(x, y) = 0$ より, $x = y = \pm 1$ である. また, $y = -x$ のとき, $g(x, y) = 0$ より, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$ である. よって, 極値をとる点の候補として,

$$(x, y) = (\pm 1, \pm 1), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

を得る. これら 4 点のうちの最初の 2 点では $f(\pm 1, \pm 1) = 2$ であり, 最後の 2 点では $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}$ である. 以上により, 点 $(\pm 1, \pm 1)$ で最大値 2 をとり, 点 $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ で最小値 $\frac{2}{3}$ をとる.

(注意): 曲線 $g(x, y) = 0$ が有界閉曲線であることをどのように確認すればよいだろうか. 関数 $g(x, y)$ が連続であるので, 曲線 $g(x, y) = 0$ は閉集合である. 問題は有界であるかどうかである. 例えば, $g(x, y) = y - x^2$ の場合は, 曲線 $y - x^2 = 0$ は放物線であり, 有界ではない. 一般的には, 与えられた関数 $g(x, y)$ 毎に不等式による評価を用いて有界であるかどうかを確認することになるが, 2次曲線

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$



曲線 $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ に制限されたグラフ $z = x^2 + y^2$
(交わりの曲線)

の場合、行列の固有値により有界性を調べることができる。2次形式 $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ は対称行列を用いて

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表すことができ、線形代数学にて、対称行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ は適当な直交行列 P を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P$$

とすることができることを学んだ。直交行列 P による直交変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により、

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \lambda u^2 + \mu v^2$$

と表され、更に、適当な平行移動の変数変換を行うことで、曲線 $g(x, y) = 0$ が空集合でない限り、曲線 $g(x, y) = 0$ は新しい直交座標 (X, Y) について、次のような方程式で与えられることがわかる（教科書「理工系学生のための線形代数-Webアシスト演習付き-培風館 124 ページ）。

(i) $\lambda\mu > 0$ のとき、 $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ （楕円，円）

(ii) $\lambda\mu < 0$ のとき、 $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = \pm 1$ （双曲線）

(iii) $\lambda\mu = 0$ のとき、 $\gamma X^2 + Y = 0$ （放物線）または

$$X^2 = \gamma^2 \text{（平行な2直線，または，1本の重複2直線）}$$

したがって、2次曲線 $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ は、 $\lambda\mu > 0$ であれば有界であり、 $\lambda\mu \leq 0$ であれば有界ではない。

問題 (1) の2次曲線 $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ の場合、対応する対称行列は $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ であり、

$$\lambda\mu = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$$

より、この2次曲線は有界であることがわかる。

(2) 関数 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ について、 $g_x(x, y) = 2x$ 、 $g_y(x, y) = 2y$ である。連立方程式

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 0 \\ g_y(x, y) = 0 \end{cases}, \quad \text{すなわち, } \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

の解は $x = y = 0$ であるが、これは $g(x, y) = 0$ を満たさない。よって、曲線 $g(x, y) = 0$ は特異点をもたない。また、曲線 $g(x, y) = 0$ は円であり、有界閉集合である。よって、定理 5.2.3 により、問題の関数は条件 $g(x, y) = 0$ のもとで最大値・最小値をもち、それらは条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の極値をとる点である。

次に、ラグランジュの未定乗数法を用いて、条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の極値をとる点を探す。

$f_x(x, y) = 1, f_y(x, y) = 2$ である。連立方程式

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0, \\ f_y + \lambda g_y = 0, \\ g = 0 \end{cases}, \text{ すなわち, } \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

について、最初の 2 つの方程式は行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 2 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる。行列 $\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$ を係数行列とする連立方程式

$\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が非自明な解 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ をもつので、

係数行列 $\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$ は正則ではない。よって、 $\begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = 0$,

すなわち、

$$\begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 2 & 2y \end{vmatrix} = 2(y - 2x) = 0$$

でなければならない。したがって、 $y = 2x$ である。

$g(x, y) = 0$ より、 $x = \pm 1, y = \pm 2$ である。よって、極値をとる点の候補として、 $(x, y) = (\pm 1, \pm 2)$ を得る。 $f(1, 2) = 5, f(-1, -2) = -5$ である。以上により、点 $(1, 2)$ で最大値 5 をとり、点 $(-1, -2)$ で最小値 -5 をとる。

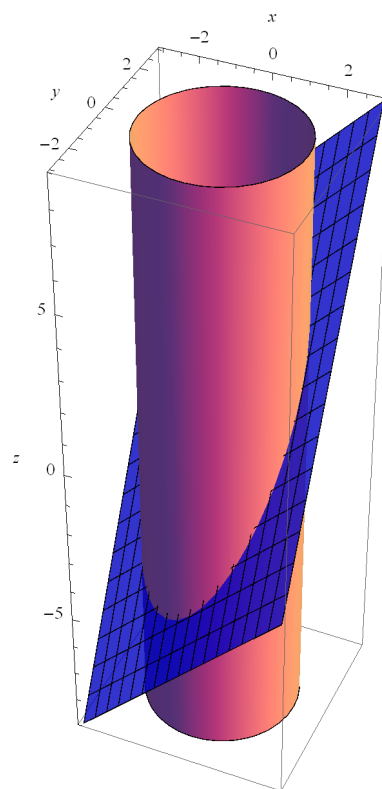
(3) 関数 $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1$ について、 $g_x(x, y) = 4x^3, g_y(x, y) = 4y^3$ である。連立方程式

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 0 \\ g_y(x, y) = 0 \end{cases}, \text{ すなわち, } \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases}$$

の解は $x = y = 0$ であるが、これは $g(x, y) = 0$ を満たさない。よって、曲線 $g(x, y) = 0$ は特異点をもたない。また、 $g(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) について、明らかに、

$$x^4 \leq x^4 + y^4 = 1$$

$$y^4 \leq x^4 + y^4 = 1$$



曲線 $x^2 + y^2 - 5 = 0$
に制限されたグラフ
 $z = x + 2y$
(交わりの曲線)

であるので、曲線 $g(x, y) = 0$ は正方形 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ に含まれる。よって、曲線 $g(x, y) = 0$ は有界閉集合である。定理 5.2.3 により、問題の関数は条件 $g(x, y) = 0$ のもとで最大値・最小値をもち、それらは条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の極値をとる点である。

次に、ラグランジュの未定乗数法を用いて、条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の極値をとる点を探す。

$f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 1$ である。連立方程式

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0, \\ f_y + \lambda g_y = 0, \\ g = 0 \end{cases}, \text{ すなわち, } \begin{cases} 0 + 4\lambda x^3 = 0, \\ 1 + 4\lambda y^3 = 0, \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

について、最初の 2 つの方程式は行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} 0 & 4x^3 \\ 1 & 4y^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる。行列 $\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$ を係数行列とする連立方程式

$\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が非自明な解 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ をもつので、係数行列 $\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$ は正則ではない。よって、 $\begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = 0$,

すなわち、

$$\begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4x^3 \\ 1 & 4y^3 \end{vmatrix} = -4x^3 = 0$$

でなければならない。したがって、 $x = 0$ である。

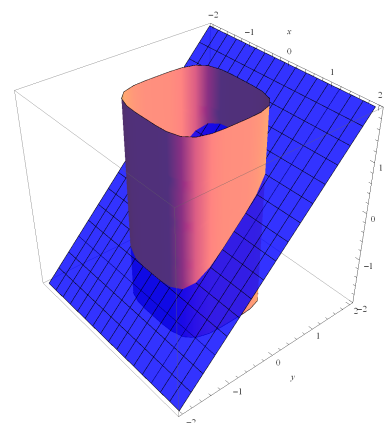
$g(x, y) = 0$ より、 $x = 0, y = \pm 1$ である。よって、極値をとる点の候補として、 $(x, y) = (0, \pm 1)$ を得る。 $f(0, 1) = 1, f(0, -1) = -1$ である。以上により、点 $(0, 1)$ で最大値 1 をとり、点 $(0, -1)$ で最小値 -1 をとる。

5.9.2

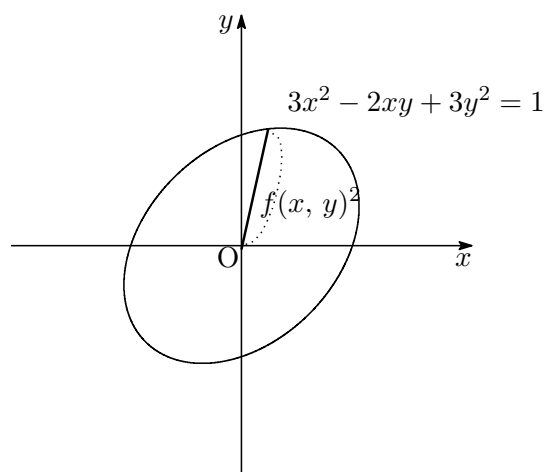
平面の点 (x, y) から原点までの距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ であるので、最大値・最小値をとる点は、関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ が最大値・最小値をとる点と同じである。よって、問題を、条件 $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 = 0$ のもとでの関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ の最大値・最小値を求める問題に帰着することができる。

$g(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 1$ とおく。 $g_x(x, y) = 6x - 2y, g_y(x, y) = -2x + 6y$ である。連立方程式

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 0 \\ g_y(x, y) = 0 \end{cases}, \text{ すなわち, } \begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases}$$



曲線 $x^4 + y^4 - 1 = 0$ に制限されたグラフ $z = y$ (交わりの曲線)



の解は $x = y = 0$ であるが、これは $g(x, y) = 0$ を満たさない。よって、曲線 $g(x, y) = 0$ は特異点をもた

ない。また、2次形式 $3x^2 - 2xy + 3y^2$ に対応する対称行列は $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ であり、

$$\lambda\mu = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

より、この2次曲線 $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 = 0$ は有界であることがわかる。よって、曲線 $g(x, y) = 0$ は有界閉集合である。定理 5.2.3 により、問題の関数は条件 $g(x, y) = 0$ のもとで最大値・最小値をもち、それらは条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の極値をとる点である。

次に、ラグランジュの未定乗数法を用いて、条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の極値をとる点を探す。

$f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 2y$ である。連立方程式

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0, \\ f_y + \lambda g_y = 0, \\ g = 0 \end{cases}, \text{ すなわち, } \begin{cases} 2x + \lambda(6x - 2y) = 0, \\ 2y + \lambda(-2x + 6y) = 0, \\ 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

について、最初の2つの方程式は行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} 2x & 6x - 2y \\ 2y & -2x + 6y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる。行列 $\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$ を係数行列とする連立方程式 $\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が非自明な解 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ をもつので、係数行列 $\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$ は正則ではない。よって、 $\begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = 0$, すなわち、

$$\begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 6x - 2y \\ 2y & -2x + 6y \end{vmatrix} = -4(x - y)(x + y) = 0$$

でなければならない。したがって、 $y = \pm x$ である。

$y = x$ のとき、 $g(x, y) = 0$ より、 $x = y = \pm \frac{1}{2}$ である。また、 $y = -x$ のとき、 $g(x, y) = 0$ より、 $x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $y = \mp \frac{1}{2\sqrt{2}}$ である。よって、極値をとる点の候補として、

$$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right), \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

を得る。これら4点のうち最初の2点では $f\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ であり、最後の2点では $f\left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$ である。以上により、関数 $f(x, y)$ は点 $\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$ で最大値 $\frac{1}{2}$ をとり、点 $\left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ で最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。

したがって、求める距離の最大値・最小値については、点 $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ で最大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ をとり、点 $\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる.