理工系学生のための微分積分

（桂利行編，岡崎悦明・岡山友昭・齋藤夏雄・佐藤好久・田上真・廣門正行・廣瀬英雄共著，培風館）

4.1 節の演習問題解答

4.1.1 積分定数はすべて C とする．

(1) $\displaystyle\int (2x^3-5x+1)\,dx = 2\cdot\frac{1}{4}x^4 - 5\cdot\frac{1}{2}x^2 + x + C = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + x + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3x^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C.$

(3) $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}\,dx = \int \frac{1+2\sqrt{x}+x}{x} = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)\,dx = \log|x| + 4\sqrt{x} + x + C.$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\,dx = \log|x+1| + C.$

(5) $\displaystyle\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C.$

(6) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

(7) $\displaystyle\int \cos(-4x)\,dx = \int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$

(8) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C.$

(9) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\,dx = \tan x - x + C.$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{2} + C.$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \int \frac{1}{x^2+(\sqrt{3})^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

(12) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+4) + C.$

4.2 節の演習問題解答

4.2.1 積分定数はすべて C とする．

(1) $2x-5=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2$ であるから，

$$\int (2x-5)^5\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot(2x-5)^5\cdot\frac{dt}{dx}\,dx = \frac{1}{2}\int t^5\,dt = \frac{1}{12}t^6 + C = \frac{1}{12}(2x-5)^6 + C.$$

(2) $x^3=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=3x^2$ であるから，

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \int \frac{1}{3}\cdot 3x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\cdot\frac{dt}{dx}\,dx = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

(3) $\sqrt{2-3x}=t$ とおくと，$x=\dfrac{2-t^2}{3}$ より $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2}{3}t$ であるから，

$$\int x\sqrt{2-3x}\,dx=\int \frac{2-t^2}{3}\cdot t\cdot\left(-\frac{2}{3}t\right)\,dt=\int\left(\frac{2}{9}t^4-\frac{4}{9}t^2\right)\,dt$$
$$=\frac{2}{45}t^5-\frac{4}{27}t^3+C=\frac{2}{45}(2-3x)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{27}(2-3x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(4) $\cos x=t$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$ であるから，

$$\int \sin x\cos^3 x\,dx=-\int\cos^3 x\cdot\frac{dt}{dx}\,dx=-\int t^3\,dt=-\frac{1}{4}t^4+C=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C.$$

(5) $\log x=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$ であるから，

$$\int\frac{\log x}{x}\,dx=\int\log x\cdot\frac{dt}{dx}\,dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\log x)^2+C.$$

(6) $e^x=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=e^x$ であるから，

$$\int\frac{e^x}{1+e^x}\,dx=\int\frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{dt}{dx}\,dx=\int\frac{1}{1+t}\,dt=\log|1+t|+C=\log(1+e^x)+C.$$

(7) $$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x\,dx\right)$$
$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=(x^2-2x+2)e^x+C.$$

(8) $$\int x\cos^2 x\,dx=\int x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+x\cdot\frac{\sin 2x}{2}-\int 1\cdot\frac{\sin 2x}{2}\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$$

(9) $$\int x^2\log x\,dx=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3+C.$$

(10) $$\int(\log x)^2\,dx=\int 1\cdot(\log x)^2\,dx=x(\log x)^2-\int x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=x(\log x)^2-2\int 1\cdot\log x\,dx=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C.$$

(11) $$\int\sin^{-1}x\,dx=\int 1\cdot\sin^{-1}x\,dx=x\sin^{-1}x-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$=x\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt\qquad(1-x^2=t\text{ と置換})$$
$$=x\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}+C=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

(12) $$\int\tan^{-1}x\,dx=x\tan^{-1}x-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C.$$

4.2.2

(1) I_n に対して部分積分をすると，

$$\begin{aligned}I_n &= \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x\, dx = \sin^{n-1} x(-\cos x) - \int (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot (-\cos x)\, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)\end{aligned}$$

が成り立つ．これを I_n について解くと，

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

を得る．

(2) $I_4 = \displaystyle\int \sin^4 x\, dx$ であるから，(1) より

$$\begin{aligned}I_4 &= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} I_2 = -\frac{1}{4}\sin^3 \cos x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2} I_0\right) \\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}\int dx \\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8} x + C \qquad (C \text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

4.3 節の演習問題解答

4.3.1 積分定数はすべて C とする．

(1) $$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x-8}\, dx &= \int \frac{1}{(x-2)(x+4)}\, dx = \frac{1}{6}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+4}\right) dx \\ &= \frac{1}{6}(\log|x-2| - \log|x+4|) + C.\end{aligned}$$

(2) $$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx = \tan^{-1}(x+1) + C.$$

(3) $$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4-1}\, dx &= \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\, dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\, dx \\ &= \frac{1}{4}(\log|x-1| - \log|x+1|) - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C.\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x}\, dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right) dx$ とおくと，$A=-1$, $B=2$, $C=1$ となるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x}\, dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}\right) dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \log(x^2+1) - \log|x| + \tan^{-1} x + C.\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\int \frac{x^4+2x^2+1}{x^2+2}\, dx &= \int \frac{x^2(x^2+2)+1}{x^2+2}\, dx = \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2+(\sqrt{2})^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

(6) $x^4+x^2-2=(x-1)(x+1)(x^2+2)$, $x^5=x(x-1)(x+1)(x^2+2)-x^3+2x$ であるから，

$$\int \frac{x^5}{x^4+x^2-2}\,dx = \int \left(x + \frac{-x^3+2x}{(x-1)(x+1)(x^2+2)}\right) dx$$

となる．ここで $\dfrac{-x^3+2x}{(x-1)(x+1)(x^2+2)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}$ とおくと，$A=\dfrac{1}{6}$, $B=\dfrac{1}{6}$, $C=-\dfrac{4}{3}$, $D=0$ とそれぞれ求まるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{x^4+x^2-2}\,dx &= \int \left(x+\frac{1}{6(x-1)}+\frac{1}{6(x+1)}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{(x^2+2)}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}(\log|x-1|+\log|x+1|)-\frac{2}{3}\log(x^2+2)+C.\end{aligned}$$

4.3.2

(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ であるから，

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t|+C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

（別解） $\cos x = t$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$ であるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \\ &= -\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right) dt = -\frac{1}{2}(\log|1+t|-\log|1-t|)+C \\ &= \frac{1}{2}\left(\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|\right)+C.\end{aligned}$$

$\cos x = \dfrac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}$ より $\dfrac{1}{2}\left(\log\left|\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|\right)=\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$ であることに注意．

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{2(1+t^2)+2t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+t+1}\,dt \\ &= \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(t+\frac{1}{2}\Big)\right)+C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\Big)\right)+C.\end{aligned}$$

(3) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3+\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{3(1+t^2)+1-t^2}\,dt \\ &= \int \frac{1}{t^2+(\sqrt{2})^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}+C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\Big)+C.\end{aligned}$$

(4) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx&=\int\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{4t}{(1+t^2)(1+t)^2}\,dt\\&=2\int\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt=2\Bigl(\tan^{-1}t+\frac{1}{1+t}\Bigr)+C\\&=2\cdot\frac{x}{2}+\frac{2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}+C=x+\frac{2\cos\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}+C.\end{aligned}$$

なお，不定積分には定数分の不定性があることに留意すると，

$$x+\frac{2\cos\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}-2=x+\frac{2\cos\dfrac{x}{2}-2\Bigl(\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\Bigr)}{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}=x-\frac{2\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}$$

より，$x-\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}+C$ でも正解である．

(5) $\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{1}{1+\tan x}$ であることに注意して $t=\tan x$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx&=\int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1-t}{1+t^2}\right)dt\\&=\frac{1}{2}(\log|1+t|+\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\log(1+t^2))+C=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{(1+t)^2}{1+t^2}+C\\&=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\log(1+\tan x)^2\cos^2 x+C\\&=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+C.\end{aligned}$$

(6) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx&=\int\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\left(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2+2t}{t}\,dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+t+2\right)dt\\&=\frac{1}{2}\log|t|+\frac{1}{4}t^2+t+C\\&=\frac{1}{2}\log\Bigl|\tan\frac{x}{2}\Bigr|+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+C.\end{aligned}$$

4.3.3

(1) $t=\sqrt[3]{1+x}$ とおくと，$x=t^3-1,\ \dfrac{dx}{dt}=3t^2$ であるから，

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx &= \int (t^3-1)t\cdot 3t^2\,dt = 3\int (t^6-t^3)\,dt\\ &= \frac{3}{7}t^7-\frac{3}{4}t^4+C=\frac{3}{28}t^4(4t^3-7)+C\\ &= \frac{3}{28}(1+x)^{\frac{4}{3}}(4x-3)+C.\end{aligned}$$

(2) $t=\sqrt{x+1}$ とおくと，$x=t^2-1,\ \dfrac{dx}{dt}=2t$ であるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{t^2-1}{(t^2+1)t}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = 2\int \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt\\ &= 2t-4\tan^{-1}t+C\\ &= 2\sqrt{x+1}-4\tan^{-1}\sqrt{x+1}+C.\end{aligned}$$

(3) $t-x=\sqrt{x^2+2x+3}$ とおくと，$x=\dfrac{t^2-3}{2(t+1)},\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx &= \int \frac{1}{t-\dfrac{t^2-3}{2(t+1)}}\cdot\frac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2}\,dt\\ &= \int \frac{t^2+2t+3}{\big(2t(t+1)-(t^2-3)\big)(t+1)}\,dt = \int \frac{1}{t+1}\,dt = \log|t+1|+C\\ &= \log|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|+C.\end{aligned}$$

(4) $t-x=\sqrt{x^2+x+1}$ とおくと，$x=\dfrac{t^2-1}{2t+1},\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx &= \int \frac{1}{\left(1-\dfrac{t^2-1}{2t+1}\right)\left(t-\dfrac{t^2-1}{2t+1}\right)}\cdot\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}\,dt\\ &= \int \frac{2(t^2+t+1)}{\big(2t+1-(t^2-1)\big)\big(t(2t+1)-(t^2-1)\big)}\,dt\\ &= \int \frac{2}{-t^2+2t+2}\,dt = -\int \frac{2}{(t-1)^2-3}\,dt\\ &= -\int \frac{2}{(t-1+\sqrt{3})(t-1-\sqrt{3})}\,dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \left(\frac{1}{t-1+\sqrt{3}}-\frac{1}{t-1-\sqrt{3}}\right)dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|\frac{t-1+\sqrt{3}}{t-1-\sqrt{3}}\right|+C\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}-1+\sqrt{3}}{x+\sqrt{x^2+x+1}-1-\sqrt{3}}\right|+C.\end{aligned}$$

4.4 節の演習問題解答

4.4.1

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{2}{3}.$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1-\Big(\frac{k}{n}\Big)^2}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

4.4.2

(1)
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{3}{\Big(x+\dfrac{1}{2}\Big)^2+\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[\log(x^2+x+1)\Big]_0^1+\frac{3}{2}\Big[\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1\\&=\frac{1}{2}\log 3+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{1}{x(x^2+3)}\,dx&=\frac{1}{3}\int_1^2\Big(\frac{1}{x}-\int_1^2\frac{x}{x^2+3}\Big)\,dx=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{6}\int_1^2\frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx\\&=\frac{1}{3}\Big[\log|x|\Big]_1^2-\frac{1}{6}\Big[\log(x^2+3)\Big]_1^2\\&=\frac{2}{3}\log 2-\frac{1}{6}\log 7.\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)'}{1+\sin^2 x}\,dx=\Big[\tan^{-1}(\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$

(4) $x^2=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2x$ であるから，

$$\int e^{x^2}x^3\,dx=\frac{1}{2}\int e^t\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\Big(te^t-\int e^t\,dt\Big)=\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+C.$$

したがって，$\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}x^3\,dx=\Big[\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)\Big]_0^1=\frac{1}{2}.$

(5) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log x\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\log x\Big]_1^2-\int_1^2\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{8}{3}\log 2-\Big[\frac{1}{9}x^3\Big]_1^2=\frac{1}{9}(24\log 2-7).$

(6)
$$\begin{aligned}\int_0^1\log(1+x^2)\,dx&=\Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\log 2-2\int_0^1\Big(1-\frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx\\&=\log 2-2\Big[x-\tan^{-1}x\Big]_0^1=\log 2-2+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

4.4.3

(1) まず $I_n = \displaystyle\int \sin^n x\,dx$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)'\,dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}\cos^2 x\,dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)
\end{aligned}
$$

より $I_n = -\dfrac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ が成り立つ．これより，I_n^* は漸化式

$$
I_n^* = -\Big[\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}^* = \frac{n-1}{n} I_{n-2}^*
$$

を満たす．また，$I_0^* = \displaystyle\int_0^1 dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1^* = \displaystyle\int_0^1 \sin x\,dx = 1$ である．したがって，上の漸化式を繰り返し用いることにより，n が偶数のときは

$$
I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0^* = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},
$$

n が奇数のときは

$$
I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_1^* = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1
$$

を得る．J_n^* についても全く同様にして示すことができる．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{16}{35}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\,dx = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi$.

4.4.4

(1) $m \neq n$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\,dx\big)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}
$$

$m = n$ のとき，

$$
\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2nx)\,dx = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{\sin 2nx}{2n}\Big]_0^{2\pi} = \pi.
$$

(2) $m \neq n$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\,dx\big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{-\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{-\cos(m-n)x}{m-n}\Big]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}
$$

$m = n$ のとき，

$$
\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2nx\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\frac{\cos 2nx}{2n}\Big]_0^{2\pi} = 0.
$$

(3) $m \neq n$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x \, dx\big)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

$m = n$ のとき，

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2nx)\, dx = \frac{1}{2}\Big[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\Big]_0^{2\pi} = \pi.$$

4.4.5

(1) $G(x) = \displaystyle\int_{1-x^2}^{1+x^3} f(t)\, dt$ とおく．$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおくと，$G(x) = F(1+x^3) - F(1-x^2)$ と表せる．$F'(x) = f(x)$ であるから，

$$\frac{d}{dx}\int_{1-x^2}^{1+x^3} f(t)\, dt = 3x^2 f(1+x^3) + 2xf(1-x^2).$$

(2) $G(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} f(t)\, dt$ とおく．$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおくと，$G(x) = F(x^2) - F(1)$ と表せる．$F'(x) = f(x)$ であるから，

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} f(t)\, dt = 2xf(x^2).$$

(3) $\displaystyle\int_1^x (x-t)f'(t)\, dt = \Big[(x-t)f(t)\Big]_1^x + \int_1^x f(t)\, dt = -(x-1)f(1) + \int_1^x f(t)\, dt$ であるから，

$$\frac{d}{dx}\int_1^x (x-t)f'(t)\, dt = f(x) - f(1).$$

4.5 節の演習問題解答

4.5.1

(1) $$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx &= -\int \frac{1-t}{\sqrt{t}}\, dt = \int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{\frac{3}{2}} - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log x\, dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[x\log x - x\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(-1 - \varepsilon\log\varepsilon + \varepsilon).$

ここで $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\varepsilon$ は不定形であるが，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon)=0$ であるから，ロピタルの定理より，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log\epsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=0.$$

よって，$\displaystyle\int_0^1\log x\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}(-1-\varepsilon\log\varepsilon+\varepsilon)=-1.$

(3) $$\begin{aligned}\int_{-1}^0\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^0\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_{-1+\varepsilon}^0\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}(\sqrt{1-(\varepsilon-1)^2}-1)=-1.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx&=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\\varepsilon_2\to+0}}\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\\varepsilon_2\to+0}}\Big[\sin^{-1}(2x-1)\Big]_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}\\&=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\\varepsilon_2\to+0}}\big(\sin^{-1}(1-2\varepsilon_2)-\sin^{-1}(2\varepsilon_1-1)\big)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\int_0^1\log\frac{1-x}{x}\,dx&=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\\varepsilon_2\to+0}}\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}\log\frac{1-x}{x}\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\\varepsilon_2\to+0}}\Big[(x-1)\log(1-x)-x\log x\Big]_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}\\&=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\\varepsilon_2\to+0}}\big(-\varepsilon_2\log\varepsilon_2-(1-\varepsilon_2)\log(1-\varepsilon_2)-(\varepsilon_1-1)\log(1-\varepsilon_1)-\varepsilon_1\log\varepsilon_1\big)\end{aligned}$$

4.5.1 (2) で見たように $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\varepsilon=0$ であるから，

$$\int_0^1\log\frac{1-x}{x}\,dx=0.$$

(6) $t=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ とおくと，$x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx&=\int t\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt=2\int\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)\,dt\\&=2\left(\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\Big(\frac{t}{(1+t^2)^2}+\tan^{-1}t\Big)\right)\qquad\text{(第 2 項に例題 4.2.1 を用いた)}\\&=\tan^{-1}t-\frac{t}{1+t^2}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-x}}-\sqrt{x(1-x)}.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\tan^{-1}\sqrt{x}1-x-\sqrt{x(1-x)}\Big]_0^{1-\varepsilon}\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}-\sqrt{(1-\varepsilon)\varepsilon}\right)=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned}\int_1^\infty\frac{1}{x(1+x^2)}\,dx&=\lim_{R\to\infty}\int_1^R\frac{1}{x(1+x^2)}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_1^R\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\right)\,dx\\&=\lim_{R\to\infty}\Big[\log|x|-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big]_1^R=\lim_{R\to\infty}\Big(\log R-\frac{1}{2}\log(1+R^2)+\frac{1}{2}\log 2\Big)\\&=\lim_{R\to\infty}\Big(\frac{1}{2}\log\frac{1}{\frac{1}{R^2}+1}+\frac{1}{2}\log 2\Big)=\frac{1}{2}\log 2.\end{aligned}$$

(8) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\Bigl(\Bigl[-xe^{-x}\Bigr]_0^R + \int_0^R e^{-x}\,dx\Bigr) = \lim_{R\to\infty}\bigl(-Re^{-R} - e^{-R} + 1\bigr).$

ここで $\displaystyle\lim_{R\to\infty} Re^{-R}$ は不定形であるが，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\frac{1}{e^R} = 0$ であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{R\to\infty} Re^{-R} = \lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^R} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{e^R} = 0.$$

よって $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\bigl(-Re^{-R} - e^{-R} + 1\bigr) = 1.$

(9) $t = e^x$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+1},dx = \int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\,dt &= \log|t| - \log|t+1| + C \\ &= \log\frac{e^x}{e^x+1} + C\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{e^x+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\Bigl[\log\frac{e^x}{e^x+1}\Bigr]_0^R \\ &= \lim_{R\to\infty}\Bigl(\log\frac{e^R}{e^R+1} + \log 2\Bigr) = \log 2.\end{aligned}$$

(10) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\log x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\Bigl(\Bigl[-\frac{\log x}{x}\Bigr]_1^R + \int_1^R \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx\Bigr) = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{\log R}{R} + 1 - \frac{1}{R}\right).$

ここで $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\frac{\log R}{R}$ は不定形であるが，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R} = 0$ であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\log R}{R} = \lim_{R\to\infty}\frac{\frac{1}{R}}{1} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R} = 0.$$

よって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{\log R}{R} + 1 - \frac{1}{R}\right) = 1.$

(11) $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$ であるから，

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)$$

となる．これより

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\sin x\,dx = \lim_{R\to\infty}\Bigl[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)\Bigr]_0^R \\ &= \lim_{R\to\infty}\Bigl(-\frac{e^{-R}}{2}(\sin R + \cos R) + \frac{1}{2}\Bigr) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(12) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\Bigl(\Bigl[-\frac{\tan^{-1}x}{x}\Bigr]_1^R + \int_1^R \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx\Bigr)$

$$= \lim_{R to\infty}\Bigl(\frac{\pi}{4} - \frac{\tan^{-1}R}{R} + \int_1^R \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx\Bigr).$$

ここで，第 2 項は **4.5.1** (7) より $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\log 2$ と求まるから，

$$\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2.$$

4.5.2 α の値によって場合分けをする．

(i) $\alpha \neq 1$ のとき

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & (\alpha<1), \\ \infty & (\alpha>1). \end{cases}$$

(ii) $\alpha = 1$ のとき

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\log|x|\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon) = \infty.$$

以上より，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & (\alpha<1) \\ \infty & (\alpha \geqq 1) \end{cases}$$

が成り立つ．

4.5.3

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \tan x\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(-\log\Big|\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\Big)\Big|\Big) = \infty.$

よってこの広義積分は発散する．

(2) 区間 $x \geqq 1$ において常に $0 \leqq \left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \leqq \dfrac{1}{x^2}$ が成り立ち，

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^R = \lim_{R\to\infty}\Big(1-\frac{1}{R}\Big) = 1$$

であるから，$\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ は収束する．よって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ も収束する．

(3) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において常に $e^x \geqq 1$ が成り立ち，

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\log|x|\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon) = \infty$$

であるから，$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$ も発散する．

(4) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において常に $e^{-x} \geqq 1$ が成り立ち，

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

であるから，$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ も収束する．

4.5.4

(1) まず $B(p,q)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ であることに注意する．

$0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{2}<1-x<1$ であるから，

$$(1-x)^{q-1} \leqq \begin{cases} 1 & (q \geqq 1) \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{q-1} = 2^{1-q} & (0<q<1) \end{cases}$$

が成り立つ．そこで定数 C を，$q \geqq 1$ のときは $C=1$，$0<q<1$ のときは $C=2^{1-q}$ とおくことにより，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx < C\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}\,dx$$

が成り立つ．ここでもし $p-1>-1$ すなわち $p>0$ であれば，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} x^{p-1}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{p}x^p\right]_\varepsilon^{\frac{1}{2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{p}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^p-\varepsilon^p\right)=\frac{1}{2^p\cdot p}$$

となって収束する．したがって，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ も収束する．

同様にして，$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ も $q>0$ のときに収束することを示すことができる．したがって，$p>0,\, q>0$ のとき，$B(p,q)$ は収束する．

(2) $x=1-t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=1-t$ であるから，

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\int_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}\cdot(-1)\,dt=\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt=B(q,p).$$

(3) $B(p,q)$ において $x=\dfrac{t}{1+t}$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{(1+t)^2}$ で $x:0\to1$ のとき $t:0\to\infty$ であるから，

$$B(p,q)=\int_0^\infty\left(\frac{t}{1+t}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{q-1}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}\,dt=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$$

となる．これより

$$\begin{aligned}
B(p+1,q)&=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\R\to\infty}}\int_\varepsilon^R\frac{t^p}{(1+t)^{p+q+1}}\,dt\\
&=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\R\to\infty}}\left(\left[t^p\cdot\left(-\frac{1}{(p+q)(1+t)^{p+q+1}}\right)\right]_\varepsilon^R-\int_\varepsilon^R\frac{-pt^{p-1}}{(p+q)(1+t)^{p+q}}\,dt\right)\\
&=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\R\to\infty}}\left(\frac{\varepsilon^p}{(p+q)(1+\varepsilon)^{p+q+1}}-\frac{R^p}{(p+q)(1+R)^{p+q+1}}+\int_\varepsilon^R\frac{pt^{p-1}}{(p+q)(1+t)^{p+q}}\,dt\right)\\
&=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\R\to\infty}}\int_\varepsilon^R\frac{pt^{p-1}}{(p+q)(1+t)^{p+q}}\,dt\\
&=\frac{p}{p+q}B(p,q).
\end{aligned}$$

同様にして，

$$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$$

も成り立つ．したがって，m,n を自然数とするとき，

$$\begin{aligned}
B(m,n)&=\frac{m-1}{m+n-1}B(m-1,n)=\frac{m-1}{m+n-1}\cdot\frac{m-2}{m+n-2}B(m-2,n)=\cdots\\
&=\frac{(m-1)!}{(m+n-1)\dots(n+1)}B(1,n)\\
&=\frac{(m-1)!(n-1)}{(m+n-1)\dots n}B(1,n-1)=\frac{(m-1)!(n-1)(n-2)}{(m+n-1)\dots(n-1)}B(1,n-2)=\cdots\\
&=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}B(1,1)\\
&=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\int_0^1 dx\\
&=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.
\end{aligned}$$

4.6 節の演習問題解答

4.6.1

(1) 曲線 $y=\dfrac{8}{x^2+4}$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ の交点は $(2,1)$ であるから，求める面積を S とすると，

$$S=\int_0^2\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{1}{2}x\right)dx=\left[8\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}x^2\right]_0^2=4\tan^{-1}1-1=\pi-1.$$

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ において $\sin x=\sin 2x$ となるのは $x=0,\dfrac{\pi}{3},2\pi$ であるから，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^\pi|\sin 2x-\sin x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)\,dx\\
&=\left[-\frac{\cos 2x}{2}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\\
&=-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\\
&=\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

(3) 求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}
S&=4\int_0^2\sqrt{1-\Big(\frac{x}{2}\Big)^2}\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot(2\cos\theta)\,d\theta\quad(x=2\sin\theta\text{ と置換})\\
&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=4\Big[\theta+\frac{\sin 2\pi}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=2\pi.
\end{aligned}$$

(4) 与えられた曲線は，x 軸と $(0,0)$, $(27,0)$ で交わる．$\dfrac{dx}{dt}=6t$, $\dfrac{dy}{dt}=3-2t$ であるから，求める面積を S とすると，

$$S=\int_0^{27}y\,dx=\int_0^3(3t-t^2)\cdot 6t\,dt=6\Big[t^3-\frac{t^4}{4}\Big]_0^3=\frac{81}{2}.$$

(5) 求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}
S &= 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3\theta\cdot(-3a\cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta \\
&= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4-\sin^6\theta)\,d\theta = 12a^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{3}{8}\pi a^2.
\end{aligned}$$

4.6.2

(1) 求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^2(x^2-2x)^2\,dx = \pi\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)\,dx = \pi\Big[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\Big]_0^2 \\
&= \pi\left(\frac{32}{5}-16+\frac{32}{3}\right) \\
&= \frac{16}{15}\pi.
\end{aligned}$$

(2) 曲線 $y=\sin 2x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ の交点の x 座標は $x=\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5}{12}\pi$ であるから，求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}\left(\sin^2 2x-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\,dx = \pi\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1}{4}\right)\,dx = \pi\Big[\frac{x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}\Big]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\pi.
\end{aligned}$$

(3) 求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-a}^a\left(\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\right)^2\,dx = \frac{\pi a^2}{2}\int_0^a(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})\,dx \\
&= \frac{\pi a^2}{2}\Big[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\Big]_0^a = \frac{\pi a^2}{2}\left(\frac{a}{2}e^2+2a-\frac{a}{2}e^{-2}\right) \\
&= \pi a^3\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4e^2}+1\right).
\end{aligned}$$

4.6.3

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),\ \dfrac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$ であるから，求める長さを L とすると，

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\big(a(1-\cos\theta)\big)^2+\big(a\sin\theta\big)^2}\,d\theta = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta \\
&= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2a\Big[-2\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} \\
&= 8a.
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$, $\dfrac{dy}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$ であるから，求める長さを L とすると，

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(e^t(\sin t + \cos t)\right)^2 + \left(e^t(\cos t - \sin t)\right)^2}\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{2}e^t\, dt = \Big[\sqrt{2}e^t\Big]_0^{\pi} \\
&= \sqrt{2}(e^{\pi} - 1).
\end{aligned}
$$

(3) 求める長さを L とすると，

$$
L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left((x^2)'\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.
$$

ここで $\sqrt{1+4x^2} = t - 2x$ と置換すると，$x = \dfrac{t^2-1}{4t}$， $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2+1}{4t^2}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1+4x^2}\, dx &= \int \left(t - 2\cdot\frac{t^2-1}{4t}\right)\cdot\frac{t^2+1}{4t^2}\, dt \\
&= \int \frac{2(t^2+1)}{4t}\cdot\frac{t^2+1}{4t^2}\, dt = \int \frac{t^4+2t^2+1}{8t^3}\, dt \\
&= \int \left(\frac{1}{8}t + \frac{1}{4t} + \frac{1}{8t^3}\right) dt \\
&= \frac{1}{16}t^2 + \frac{1}{4}\log|t| - \frac{1}{16t^2} + C \qquad (C\text{ は積分定数}) \\
&= \frac{1}{16}(2x+\sqrt{1+4x^2})^2 + \frac{1}{4}\log|2x+\sqrt{1+4x^2}| - \frac{1}{16(2x+\sqrt{1+4x^2})^2} + C \\
&= \frac{1}{16}(2x+\sqrt{1+4x^2})^2 + \frac{1}{4}\log|2x+\sqrt{1+4x^2}| - \frac{1}{16}(2x-\sqrt{1+4x^2})^2 + C \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\log\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right| + C
\end{aligned}
$$

となる．よって，

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\log\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|\right]_0^1 \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

(4) $(\log\cos x)' = -\tan x$ であるから，求める長さを L とすると，

$$
L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\, dx.
$$

ここで $t = \sin x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \cos x$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}\, dx &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C \qquad (C\text{ は積分定数})
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \log(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}
$$

4.7 節の演習問題解答

4.7.1

(1) まず，$y=0$ はこの微分方程式の解である．そこで $y \neq 0$ とすると，

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\,dx = \int 2x\,dx$$

より

$$\int \frac{1}{y}\,dy = x^2 + C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数})$$

となり，これより $\log|y| = x^2 + C_1$ と求まる．したがって $y = \pm e^{C_1} e^{x^2}$ と表せ，任意定数を $C = \pm e^{C_1}$ とおき直すと，$y = Ce^{x^2}$ を得る．$y=0$ のときはこの式において $C=0$ とおいたものになっているから，求める一般解は $y = Ce^{x^2}$.

(2) まず，$y=\pm 1$ はこの微分方程式の解である．そこで $y \neq \pm 1$ とすると，

$$\int \frac{1}{y^2-1}\frac{dy}{dx}\,dx = \int dx$$

より

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = x + C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数})$$

となり，これより $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{y-1}{y+1}\right| = x + C_1$ と求まる．したがって $\dfrac{y-1}{y+1} = \pm e^{C_1}e^{2x}$ と表せ，任意定数を $C = \pm e^{C_1}$ とおき直すと，$\dfrac{y-1}{y+1} = Ce^{2x}$ を得る．これより，$y = \dfrac{1+Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}$ を得る．$y=\pm 1$ のときもこの式に含まれるから，求める一般解は $y = \dfrac{1+Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}$.

(3) まず，$y=0$ はこの微分方程式の解である．そこで $y \neq 0$ とすると，

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\,dx = -\int \frac{1}{2x}\,dx$$

より

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{2}\log|x| + C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数})$$

となり，これより $\log|y| = -\dfrac{1}{2}\log|x| + C_1$ と求まる．したがって $y = \pm e^{C_1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と表せ，任意定数を $C = \pm e^{C_1}$ とおき直すと，$y = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$ を得る．$y=0$ のときはこの式において $C=0$ とおいたものになっているから，求める一般解は $y = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$.

(4) 与えられた式より，

$$\int \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

より

$$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数})$$

と求まる．したがって $y = \tan(\tan^{-1} x + C_1) = \dfrac{x+\tan C_1}{1 - x\tan C_1}$ と表せ，任意定数を $C = \tan C_1$ とおき直すと，$y = \dfrac{x+C}{1-Cx}$ を得る．

(5) $y = ux$ とおくと，$y' = \dfrac{du}{dx}x + u$ であるから，$y' = \dfrac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}} = \dfrac{1-u}{1+u}$ より，

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1-u}{1+u} - u\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

と変数分離形の微分方程式になる．$1-2u-u^2 \neq 0$ のときにこれを解くと

$$\int \frac{1+u}{1-2u-u^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

より

$$\log|1-2u-u^2| = -2\log|x| + C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数})$$

となり，これより $1-2u-u^2 = \dfrac{\pm e^{C_1}}{x^2}$ と求まる．任意定数を $C = \pm e^{C_1}$ とおき直し，$u = \dfrac{y}{x}$ を代入すると

$$x^2 - 2xy - y^2 = C$$

を得る．$1-2u-u^2 = 0$ のときはこの式において $C = 0$ としたときになっているから，これが求める一般解である．

(6) $y = ux$ とおくと，$y' = \dfrac{du}{dx}x + u$ であるから，$y' = \dfrac{2\cdot\dfrac{y}{x}}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{2u}{1-u^2}$ より，

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2u}{1-u^2} - u\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{u+u^3}{1-u^2}$$

と変数分離形の微分方程式になる．$u \neq 0$ のときにこれを解くと

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

より

$$\log|u| - \log(1+u^2) = \log|x| + C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数})$$

となり，これより $1+u^2 = \dfrac{ux}{\pm e^{C_1}}$ と求まる．任意定数を $C = \dfrac{1}{\pm e^{C_1}}$ とおき直し，$u = \dfrac{y}{x}$ を代入すると

$$x^2 + y^2 = Cy$$

を得る．

(7) $y = ux$ とおくと，$y' = \dfrac{du}{dx}x + u$ であるから，与えられた微分方程式は

$$x\tan u - ux + x\left(x\frac{du}{dx} + u\right) = 0$$

となり，これより $x\dfrac{du}{dx} = \tan u$ を得る．$\tan u \neq 0$ のときにこれを解くと

$$\int \frac{1}{\tan u}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

より

$$\log|\sin u| = -\log|x| + C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数})$$

となり，これより $\sin u = \dfrac{\pm e^{C_1}}{x}$ と求まる．任意定数を $C = \pm e^{C_1}$ とおき直し，$u = \dfrac{y}{x}$ を代入すると

$$x\sin\frac{y}{x} = C$$

を得る．

(8) まず微分方程式 $y' - y = 0$ を解くと，$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx$ より一般解は $y = C_1e^x$ と求まる．そこで任意定数 C_1 を x の関数 $C(x)$ におき直して $y' = x + y$ に代入すると，$C'(x)e^x = x$ を得る．したがって

$$C(x) = \int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

となるから，求める解は

$$y = (-xe^{-x} - e^{-x} + C)e^x = -x - 1 + Ce^x$$

となる．

(9) まず微分方程式 $y' + y = 0$ を解くと，$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = -\int dx$ より一般解は $y = C_1e^{-x}$ と求まる．そこで任意定数 C_1 を x の関数 $C(x)$ におき直して $y' + y = 2x$ に代入すると，$C'(x)e^{-x} = 2x$ を得る．したがって

$$C(x) = 2\int xe^x\,dx = 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = 2xe^x - 2e^x + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

となるから，求める解は

$$y = (2xe^x - 2e^x + C)e^{-x} = 2x - 2 + Ce^{-x}$$

となる．

(10) まず微分方程式 $y' + 2y\tan x = 0$ を解くと，$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = -2\int \tan x\,dx$ より一般解は $y = C_1\cos^2 x$ と求まる．そこで任意定数 C_1 を x の関数 $C(x)$ におき直して $y' + 2y\tan x = \sin x$ に代入すると，$C'(x)\cos^2 x = \sin x$ を得る．したがって

$$C(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x} + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

となるから，求める解は

$$y = \left(\frac{1}{\cos x} + C \right) \cos^2 x = \cos x + C \cos^2 x$$

となる．