演習問題 3.1.1 次の極限を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x}{e^{3x}-e^x}$$

3.1.1 分子・分母, 因数分解する.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x}{e^{3x}-e^x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(e^x-1)}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{e^x(e^x+1)}\\ &= 1\cdot\frac{-1\cdot 1}{e^0(e^0+1)} = \frac{-1}{2}.\end{aligned}$$

演習問題 3.1.2

(1) 三角関数の加法定理を証明せよ.

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b),$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b).$$

(2) 加法定理を用いて, 以下の式を計算せよ.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x, \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x$$

3.1.2 (1) 任意の実数 a, b に対して,

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$$

が成り立つことを証明する.

xy 平面において原点中心, 半径 1 の単位円 C を考える. この単位円 C の円周上の点を一つ取り, P とし, OP と x 軸のなす角を a とおく. また P を反時計まわりに角度 b だけ回転させる. (右図)

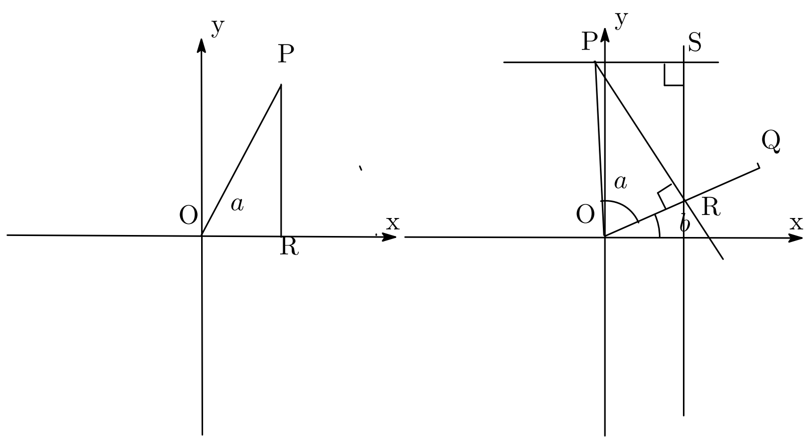

図 **3.1.2**

右図の点 P の y 座標を調べることで, 正弦関数 $\sin x$ の加法定理を得る. 実際, 右図において点 R の y 座標を調べると, $\mathrm{OR}\sin b = \cos a\sin b$ であることがわかる. また, 右図の点 P を通り, x 軸に平行な直線を考えると. 角 PRS の大きさは b に等しいことがわかり, 線分 RS の長さは, $\mathrm{PR}\cos b = \sin a\cos b$ であることが従う.

従って, 右図の点 P の y 座標の値は, 2 通りの方法で表すことが出来る. 定義より $\sin(a+b)$ であり, また上の考察より, $\sin a\cos b+\cos a\sin b$ でもある.

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b-\sin a\sin b$$

についても同様な考察にて証明できる.

(2) 三角関数に関するかなりの事柄は, 加法定理より導出できる.

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x &= \sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\\ &= \cos x\cdot 1-\cos x=0.\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x &= \cos x\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin x\\ &= -\sin x\cdot 1+\sin x=0.\end{aligned}$$

演習問題 3.1.3 以下の等式が成り立つことを証明せよ.

$$(\log x)'=\frac{1}{x},\qquad (\cos x)'=-\sin x,\qquad (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3.1.3 等式 $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ が成り立つことの証明.

ここでは, $x>0$ において関数 $\log x$ が連続であること, および等式 $\displaystyle\lim_{h\to+\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h=e$ (ネピアの定数, 定理 1.2.3) が成り立つことを認めて証明する. まず $\log x$ が連続であるので $\displaystyle\lim_{h\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{h}\right)^h=\log\left(\lim_{h\to+\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h\right)$ が従う.

$$\lim_{h\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{h}\right)^h=\log e$$

すなわち,

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{h}\right)}{\dfrac{1}{h}}=1.$$

ここで, $1+\dfrac{1}{h}$ を x と置き直すと,

$$\lim_{x\to1+0}\frac{\log x-\log 1}{x-1}=1.$$

他方, $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{\log x}{x-1}$ については, $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{h}\right)^{-h}$ を考察する. 以下の様な変形を経て,

$$\left(1-\frac{1}{h}\right)^{-h}=\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{h}\right)^h}=\left(\frac{1}{\dfrac{h-1}{h}}\right)^h=\left(1+\frac{1}{h-1}\right)^{h-1}\left(1+\frac{1}{h-1}\right),$$

$h\to+\infty$ のときの極限値は e である. これは次式が成り立つことを示しており,

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{\log\left(1-\dfrac{1}{h}\right)}{-\dfrac{1}{h}}=1.$$

$1-\dfrac{1}{h}$ を x と置き直すと, 次式が成り立つ.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\log x-\log 1}{x-1}=1.$$

以上より $\lim_{x\to 1}\dfrac{\log x-\log 1}{x-1}=1$ が従う．この等式を用いると,

$$(\log x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log h-1}{h}\cdot\log x=\log x$$

を得る．(証明終)

加法定理を用いて極限 $\lim_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ を変形, 計算する.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(-1+\cos h)-\sin x\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{2}\frac{\sin^2\frac{h}{2}\cos x}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}-\frac{\sin h}{h}\sin x\right)$$
$$=0\cdot 1^2\cos x-1\sin x=-\sin x.$$

(証明終)

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

の証明. (この等式は次節で述べる商の微分法を用いる方法が効率的であるが, ここでは微分係数の定義に現れる極限の値を計算することで証明する.)

$$(\tan x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x}\right)$$

ここで, 加法定理を用いると分子が $\sin((x+h)-x)$ に等しいことがわかり, 以下の等式を得る.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

演習問題 3.1.4

(1) 整数 n, p $(1\leqq p\leqq n)$ に対して, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}.$$

(2) 次の等式 (2 項定理) が成り立つことを証明せよ.

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$

3.1.4 (1) 直接計算により (右辺)$=\dfrac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!}-\dfrac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!}=\dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

(2) 例えば n に関する数学的帰納法を用いる.

i) $n=1$ の時, 明らかに成立.

ii) $n=k$ の時, 成立すると仮定する.

iii) $n=k+1$ の時, $(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k$ であり, 右辺に帰納法の仮定を用いると.

$$(a+b)\left(a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\cdots+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+b^k\right).$$

展開すると,

$$a^{k+1}+a^kb+\binom{k}{1}a^kb+\binom{k}{1}a^{k-1}b^2+\binom{k}{2}a^{k-1}b^2+\binom{k}{2}a^{k-2}b^3+\cdots$$

$$+\binom{k}{k-2}a^2b^{k-1}+\binom{k}{k-1}a^2b^{k-1}+\binom{k}{k-1}ab^k+ab^k+b^{k+1}.$$

ここで, 先に示した等式を用いて, 第 2 項と第 3 項をまとめ, 第 4 項と第 5 項とをまとめ, ..., 第 $2k$ 項と第 $2k+1$ 項とをまとめる. (k 回の操作) 結果として,

$$a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\binom{k+1}{3}a^{k-2}b^3+\cdots$$

$$+\binom{k+1}{k-1}a^2b^{k-1}+\binom{k+1}{k}ab^k+b^{k+1}$$

を得る.

以上より, 任意の $n \geq 1$ に対して, 問題の等式が成り立つ.

演習問題 3.2.1 以下の導関数およびその定義域を答えよ.

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x$$

3.2.1

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

関数 $\cos^{-1}x$ の定義域は, 閉区間 $[-1,1]$ であったが, 定義域の両端においては微分係数は定義されない. その 2 点を除き, 開区間 $(-1,1)$ が答えである.

演習問題 3.2.2 媒介変数 $t\in\boldsymbol{R}$ を用いて定まる曲線 $x(t)=t^3-3t, y(t)=-3t^2+1$ を考える.
(1) t の関数 $x(t)$ の増減を調べグラフの概形を tx 平面に描け.
(2) t の関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を計算せよ. $\dfrac{dy}{dx}=0$ を満たす t の値, および $\dfrac{dy}{dx}>0$ を満たす t の範囲を求めよ.
(3) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{dy}{dx}$, $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{dy}{dx}$ を求めよ.
(4) ベクトル $\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)$ の大きさは 3 以上であることを示せ.
(5) 曲線 $(x(t),y(t))$ の概形を xy 平面に描け.

3.2.2 (1) t の関数 $x(t)=t^3-3t$ を t で微分して $\dfrac{dx}{dt}=3t^2-3=3(t-1)(t+1)$ を得る. 増減表は以下の通り.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$\dfrac{dx}{dt}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x(t)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(2) t の関数 $y(t)=-3t^2+1$ を t で微分することで $\dfrac{dx}{dt}=-6t$ を得る. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ を用いて $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2t}{(t-1)(t+1)}$ がわかる (ただし, $t\neq\pm1$). 従って $\dfrac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow t=0$. かつ $\dfrac{dy}{dx}>0\Leftrightarrow t<-1, 0<t<1$ であることがわかる.

(3) 極限を計算する.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-2t}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-2}{(1-\frac{1}{t})(t+1)}=0.$$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-2t}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-2}{(1-\frac{1}{t})(t+1)}=0.$$

(4) $\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)=\left(3t^2-3,-6t\right)$ であるので. ベクトルの大きさは $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(3t^2-3)^2+36t^2}=3(t^2+1)\geqq 3$.

(5) $t=-1,0,1$ に対応した $(x,y)=(2,-2),(0,1),(-2,-2)$ が特徴的な点である. また $t\to-\infty$ の時, t の関数 x,y は共に $-\infty$ へ近付く. $t\to\infty$ の時, x,y はそれぞれ ∞, $-\infty$ へ近付くが, $\dfrac{dy}{dx}$ は 0 に近付く ($t\to\pm\infty$). $x(t)$, $y(t)$ は, t の多項式なので連続, ベクトル $\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)$ の大きさは 3 以上だったので, t の関数としての $(x(t),y(t))$ は一点に収束したり, 曲線上を折り返したりすることはない. 以上の特徴と, (2) で考察した $\dfrac{dy}{dx}$ の値を考慮して, グラフの概形を描く.

演習問題 3.2.3 積, 商の導関数, 合成関数の導関数の公式 (命題 3.2.1 参照) を導出せよ.

3.2.3

$f(x)$, $g(x)$ 共に微分可能なので, 特に連続関数である (命題 3.1.1). 以下, この性質は断りなく用いる.

まず $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$ を考察する.

分子を変形し, $f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)$. 極限は,

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)$$

であり, 極限値 $f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$ を得る.

次に極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h}$ について考察する. (条件より $g(x_0)\neq 0$ であるが, $g(x_0)$ は連続関数より, $0<|h|$ が十分小さいとき $g(x_0+h)\neq 0$ としてよい.)

分子を変形して, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+h)}{hg(x_0+h)g(x_0)}$. 更に変形して,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+h)}{hg(x_0+h)g(x_0)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x_0+h)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x_0+h)-g(x_0))}{hg(x_0+h)g(x_0)}$$

これは, $\displaystyle\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ に等しい.

次に極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}$ を考察する.

i) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\neq 0$ のとき.

x が十分 x_0 に近いとき, $|f(x)-f(x_0)|>0$ が成り立つとしてよい. これは, 例えば以下の様に示される. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{h}=c$ とおく. もし $c>0$ であれば. 極限の定義より x が十分 x_0 に近いとき, $\displaystyle\frac{f(x)-f(x_0)}{h}>\frac{c}{2}$ が成り立ち, 主張を得る. $c<0$ の場合も同様. これらの考察から, 問題の極限は以下のように変形でき, 極限値 $g'(f(x_0))f'(x_0)$ を得る.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$ のとき.

$g'(f(x_0))f'(x_0)=0$ なので $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}=0$ を証明する.

今, 十分小さな $0<\delta$ を取り, 開区間 $(-\delta+x_0,x_0+\delta)$ とその部分集合 $\Gamma:=\{x|f(x)=f(x_0)\}$ を考える.

$$\begin{aligned}&\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}\\&=\begin{cases}\dfrac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & x_0+h\notin\Gamma\\ 0 & x_0+h\in\Gamma\end{cases}\end{aligned}$$

と表され, 各条件を考慮すると $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}=0$ が従うことがわかる.

以上各等式の x_0 を x に置き換え, x についての関数の等式とみるとよい.

演習問題 3.2.4 $\boldsymbol{R}$ において, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

3.2.4

b を実数の定数とし, $x = b$ における $\tan^{-1}x$ の微分係数を計算する. $a = \tan^{-1}b$ とおく. すなわち $\tan a = b$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$ である. 逆関数の微分係数の性質より,

$$\left(\tan^{-1}x\right)'\Big|_{x=b} = \frac{1}{(\tan x)'|_{x=a}} = \cos^2 a,$$

右辺を更に変形すると $\cos^2 a = \dfrac{1}{1+\tan^2 a}$ であり, 条件 $\tan a = b$ を用いると,

$$\left(\tan^{-1}x\right)'\Big|_{x=b} = \frac{1}{1+b^2}$$

であることがわかる. 文字 b を x におき直すことで $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}$ を得る.

演習問題 3.3.1 以下の命題の真偽を調べよ. 真であれば証明をし, 偽であればその理由を述べよ.

(1) n を正の整数として, 関数 $f(x) = \log(7x+1)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ に関する以下の等式が成り立つ.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(x+\frac{1}{7}\right)^{-n}$$

(2) n を正の整数として, 関数 $f(x) = \log(7x+1)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ に関する以下の等式が成り立つ.

$$f^{(n)}(x) = -(-7)^n(7x+1)^{-n}$$

3.3.1

(1) 真である. 以下数学的帰納法にて証明する.

i) $n=1$ のとき. 明らかに成り立つ.

ii) $n=k$ のとき, 成り立つと仮定する.

iii) $n=k+1$ のとき. $f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)'$ より, ii) の仮定を用いて,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left((-1)^{k-1}(k-1)!\left(x+\frac{1}{7}\right)^{-k}\right)' \\ &= (-k)(-1)^{k-1}(k-1)!\left(x+\frac{1}{7}\right)^{-k-1}. \end{aligned}$$

式を整理して $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k!\left(x+\frac{1}{7}\right)^{-k-1}$ を得, $n=k+1$ の場合も成り立つことが分かる. 以上より, 命題が証明された.

(2) 偽である.

理由: この命題が真であると仮定する. $f^{(n)}(x) = -(-7)^n(7x+1)^{-n}$ より, $n=2$ を代入した等式 $f^{(2)}(x) = -(-7)^2(7x+1)^{-2}$ も真である. 両辺微分して $f^{(3)}(x) = (-2)7(-1)(-7)^2(7x+1)^{-3} = (-2)(-7)^3(7x+1)^{-3}$ であるので, $n=3$ を代入して得られる式と比較して $(-2)(-7)^3(7x+1)^{-3} = -(-7)^3(7x+1)^{-3}$ を得る. しかし, この等式は矛盾している. (例えば, $x=0$ を代すると $(-2)(-7)^3 = -(-7)^3$ となり, 偽である.) 以上より, この命題が偽であることが示された.

演習問題 3.3.2 関数 x^2e^{-x} の n 階の導関数を求めよ.

3.3.2 ライプニッツの公式 (命題 3.3.2) を用いる $\left(x^2-2nx+n(n-1)\right)(-1)^n e^{-x}$.

演習問題 3.3.3 以下の関数 $f(x)$ の n 階の導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め, $f^{(n)}(0)$ を計算せよ.

(1) $f(x) = \sin(4x)$

(2) $f(x) = (x+1)^{\pi}$

3.3.3 (1) $f^{(n)}(x) = 4^n\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}n\right)$. $f^{(n)}(0) = 4^n(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ (n が偶数のとき), 0 (n が奇数のとき).

(2) $f^{(n)}(x) = \pi(\pi-1)\cdots(\pi-n+1)(x+1)^{\pi-n}$. $f^{(n)}(0) = \pi(\pi-1)\cdots(\pi-n+1)$.

演習問題 3.3.4 関数 $f(x) = x^2|x|$ について, 3 階の導関数 $f^{(3)}(x)$ を求めよ.

3.3.4 $x>0$ のとき, $f(x) = x^2\cdot x$ より $f'(x) = 3x^2$ が従う. $x<0$ のとき, $f(x) = x^2\cdot(-x)$ より $f'(x) = -3x^2$. $x=0$ のとき, 微分係数の定義に従い

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0}h|h| = 0.$$

以上まとめて,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0, \\ -3x^2 & x < 0. \end{cases}$$

2 階導関数についても同様に $x > 0$ のとき, $f''(x) = 6x$ である. $x < 0$ のとき $f''(x) = -6x$. $x = 0$ については,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to +0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} &= \lim_{h \to +0} \frac{3h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to +0} 3h = 0, \\ \lim_{h \to -0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} &= \lim_{h \to -0} \frac{-3h^2 - 0}{h} = \lim_{h \to -0} (-3h) = 0 \end{aligned}$$

より, $f''(0) = 0$. 以上まとめて,

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x \geq 0, \\ -6x & x < 0 \end{cases}$$

を得る. 3 階導関数については $x > 0$ のとき, $f'''(x) = 6$, $x < 0$ のとき $f'''(x) = -6$. $x = 0$ については,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to +0} \frac{f''(h) - f''(0)}{h} &= \lim_{h \to +0} \frac{6h - 0}{h} = \lim_{h \to +0} 6 = 6, \\ \lim_{h \to -0} \frac{f''(h) - f''(0)}{h} &= \lim_{h \to -0} \frac{-6h - 0}{h} = \lim_{h \to -0} (-6) = -6. \end{aligned}$$

右極限, 左極限が一致していないため $f'''(0)$ は存在しない. 以上まとめて,

$$f'''(x) = \begin{cases} 6 & x > 0, \\ -6 & x < 0, \end{cases}$$

$f'''(0)$ は存在しない.

演習問題 3.4.1 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$

3.4.1 (1) 極限の形からロピタルの定理を用いる事を考える. $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形なので, 分子分母をそれぞれ微分して極限を求める,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}=0$. ロピタルの定理を適用し $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}=0$ を得る.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形なので, 分子分母をそれぞれ微分して極限を求めると $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}$. まだ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形なので, もう一度分子分母を微分して, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$. ロピタルの定理を 2 回適用し $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ を得る.

(3) 分子分母をそれぞれ微分すると $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}$ であり, 分母を比較すると状況は更に悪くなっている. そこで, 例えば最初の分数の形を変えてみる. $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^{-2}}{e^{\frac{1}{x}}}$ とすると, これは $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形なので, 分子分母をそれぞれ微分し $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{-2x^{-3}}{\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+0}\frac{2x^{-1}}{e^{\frac{1}{x}}}$. これは $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形なので, 分子分母をもう一度微分し $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{-2x^{-2}}{\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+0}\frac{2}{e^{\frac{1}{x}}}=0$. ロピタルの定理を 2 回適用し $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}=0$ を得る.

(4) $\sin^{-1}0=0$ なので, これは $\sin^{-1}x$ の $x=0$ における微分係数である. 逆関数の微分法 (命題 3.2.2) を適用し $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\frac{1}{\cos 0}=1$ を得る.

演習問題 3.4.2 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(x+4)(x-1)(2x+1)x^3}{(x^2+1)^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^4}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}(x^2)}{x^2}$

3.4.2 (1) 分子分母を x^6 で割り, 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3}=\frac{1\cdot1\cdot2}{1^3}=2$ を得る.

(2) $\dfrac{0}{0}$ の形の不定形なので, 分子分母をそれぞれ微分して $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{4x^3}$. これは $\dfrac{0}{0}$ の形の不定形なので, 更に分子分母を微分して $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+x}{12x^2}$, もう一度分子分母を微分して $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-\cos x+1}{24x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{24x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{48}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{0}{48}\cdot1^2=0$. ロピタルの定理を 2 回適用し $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^4}=0$ を得る.

(3) $\tan^{-1}0=0$ より, この極限は $h=x^2$ とおくと $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{\tan^{-1}h-\tan^{-1}0}{h}$, 特に $\tan^{-1}x$ の $x=0$ における微分係数に等しい. 逆関数の微分法 (命題 3.2.2) を適用し, $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{\tan^{-1}h-\tan^{-1}0}{h}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 0}}=1$. すなわち $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}(x^2)}{x^2}=1$ を得る.

演習問題 3.4.3 (π の近似値) $\tan^{-1} x$ のマクローリン展開を用いて π の近似値を求める．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan^{-1} x$ の 3 次のマクローリン展開が

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{(\theta x - (\theta x)^3)\, x^4}{(1+(\theta x)^2)^4}, \quad 0 < \theta < 1$$

で与えられることを示せ．

(2) $\theta_0 := \tan^{-1} \frac{1}{5}$ とおく．$\tan(4\theta_0) = \frac{120}{119}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\tan\left(4\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$ が成り立つことを示せ．

(4) 等式 $\pi = 16\theta_0 - 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$ を利用して，π を小数第 2 位まで求めよ．

3.4.3 (1) $f(x) = \tan^{-1} x$ とおく．$f'(x) = (1+x^2)^{-1}$ であったので $f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$．更に微分して $f'''(x) = -2(1+x^2)^{-2} + (-2x)(-4x)(1+x^2)^{-3} = -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -2(-4x)(1+x^2)^{-3} + 16x(1+x^2)^{-3} + 8x^2(-6x)(1+x^2)^{-4} = 24x(1+x^2)^{-3} - 48x^3(1+x^2)^{-4} = 24(x-x^3)(1+x^2)^{-4}$．特に $x = 0$ を代入すると，$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -2$ であり，マクローリンの定理の式にあてはめると

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{\left(\theta x - (\theta x)^3\right) x^4}{\left(1+(\theta x)^2\right)^4}, \quad 0 < \theta < 1$$

であることがわかる．

(2) 2 倍角の等式 $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ を用いる．$\tan 2\theta_0 = \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \dfrac{5}{12}$．$\tan 4\theta_0 = \dfrac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \dfrac{120}{119}$．

(3) 加法定理を用いて

$$\tan\left(4\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(4\theta_0) - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan(4\theta_0)\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

(4) $\pi = 16\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - 4\tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ であり，(1) にて得られたマクローリン展開を用いると

$$\begin{aligned}
\pi &= \left(\frac{16}{5} - \frac{16}{3\cdot 5^3} + 剰余項_A\right) - \left(\frac{4}{239} - \frac{4}{3\cdot 239^3} + 剰余項_B\right) \\
&= \left(\frac{16}{5} + \frac{4}{3\cdot 239^3} + 剰余項_A\right) - \left(\frac{16}{3\cdot 5^3} + \frac{4}{239} + 剰余項_B\right)
\end{aligned}$$

を得る．最初の項を具体的にそれぞれ計算すると $\pi = (3.2000\cdots + 剰余項_A) - (0.0594\cdots + 剰余項_B)$ であり，$0 < 剰余項_A < \frac{1}{5^5} = 0.0003$, $0 < 剰余項_B < \frac{1}{239^5} < 0.0001$ であるので，$\pi = 3.140\cdots$．π を小数第 2 位まで求めると 3.14 である．

演習問題 3.4.4 実数の定数 r は $|r| < 1$ を満たすものとし，r に収束する数列 a_n を考える．$b_n = (a_n)^n$ にて定まる数列 b_n について，極限 $\lim_{n\to+\infty} b_n$ を調べよ．

3.4.4 $\lim_{n\to+\infty} a_n = r$ が成り立つので，ある $N_0 > 0$ が取れて，$n \geq N_0$ ならば $|a_n| < \dfrac{|r|+1}{2}$ を満たすとしてよい．$0 \leq |b_n| = |a_n|^n < \left(\dfrac{|r|+1}{2}\right)^n$ が成立ち，$0 \leq \dfrac{|r|+1}{2} < 1$ より $\left(\dfrac{|r|+1}{2}\right)^n \to 0$ $(n \to +\infty)$ が従う．はさみうちの原理より $\lim_{n\to+\infty} |b_n| = 0$, すなわち $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ が成り立つ．(定理 1.3.5 参照)

演習問題 3.4.5 (三角関数の一意性) $\boldsymbol{R}$ を定義域とする微分可能な実数値関数 $f(x)$ について，もし以下の条件が満たされるならば $f(x)$ は 0 (定数関数), $\cos x$ または $-\cos x$ のいずれかであることを示せ．

(1) $f(x)$ は偶関数.

(2) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

(3) $f(a+b)=f(a)f(b)-f'(a)f'(b)$ および $f'(a+b)=f'(a)f(b)+f(a)f'(b)$ が任意の $a,b\in\boldsymbol{R}$ にて成り立つ.

3.4.5 まず $f''(x)=-f(x)$ が成り立つことを示す.

(3) 式に $a=b=0$ を代入する. $f(0)=f(0)^2-f'(0)^2$ かつ $f'(0)=2f'(0)f(0)$. ここで, 後半の条件式より, $f'(0)(1-2f(0))=0$ が成り立ち, 特に $f'(0)=0$ または $f(0)=\dfrac{1}{2}$ である. これを, 前半の条件式に代入すると, $f'(0)=0$ ならば, $f(0)-f(0)^2=0$. 因数分解して $f(0)(1-f(0))=0$. つまり $f(0)=0$ または $f(0)=1$ である. 一方 $f(0)=\dfrac{1}{2}$ ならば, $(f'(0))^2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}<0$ となり, これを満たす実数 $f'(0)$ は存在しない. よって $(f'(0),f(0))=(0,1),(0,0)$ を得る.

他方, 条件 (1) より $f(-x)=f(x)$. 両辺微分して $-f'(-x)=f'(x)$ を得る.

(3) の第 1 式について $b=-a$ とすると, $f(0)=f(a)^2+f'(a)^2$. 従って, $(f'(0),f(0))=(0,0)$ のとき, $f(a)=f'(a)=0$ (定数関数) であり, 題意は満たされる. 他方 $(f'(0),f(0))=(0,1)$ のとき, 条件式 $1=f(a)^2+f'(a)^2$ が得られる. 特に, $a=\dfrac{\pi}{2}$ とすると, 条件 (2) より, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2=1$, つまり $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pm 1$ である.

ここで, 条件 (3) の第 1 式において, $b=\dfrac{\pi}{2}$ とおくと $f\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)=-f'(a)f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. 任意定数 a を変数 x に置き換え, $f'(x)=\dfrac{-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\mp f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ である. 特に $f'(x)$ は微分可能であり, $f''(x)=\mp f'\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ を得る.

他方 $b=-\dfrac{\pi}{2}$ とおくと, $f\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)=(-1)\cdot f'(a)f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=f'(a)f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ であり, 上と同様にして $f'(x)=\pm f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ を得る. これら 2 つの条件式をあわせることで,

$$f''(x)=\mp f'(x+\frac{\pi}{2})=\mp\left(\pm f(x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})\right),$$

つまり $f''(x)=-f(x)$ を得る.

以上より, 任意の $x\in\boldsymbol{R}$ について $f''(x)=-f(x)$ が満たされることがわかる.

次に, $F(x)=f'(x)\cos x+f(x)\sin x$, $G(x)=f(x)\cos x-f'(x)\sin x$ とおき, これらの関数が定数であることを示す.

それぞれ微分すると, $F'(x)=f''(x)\cos x-f'(x)\sin x+f'(x)\sin x+f(x)\cos x$, $G(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x-f''(x)\sin x-f'(x)\cos x$. 上で示した等式 $f''(x)=-f(x)$ を用いると $F'(x)=G'(x)=0$, すなわち $F(x)$, $G(x)$ 共に定数であることがわかる.

$F(x)=F(0)$ かつ $G(x)=G(0)$ であるので,

$$\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f'(x)\\ f(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f'(0)\\ f(0)\end{pmatrix}.$$

すなわち

$$\begin{pmatrix}f'(x)\\ f(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f'(0)\\ f(0)\end{pmatrix}.$$

以上より, $(f'(0),f(0))=(0,1)$ の場合, $f(x)=\cos x$, $f'(x)=-\sin x$ であり, $(f'(0),f(0))=(0,0)$ の場合, $f(x)=0$, $f'(x)=0$ であることがわかる.

演習問題 3.4.6 (コーシーの平均値の定理) $f(x)$, $g(x)$ をある閉区間 $[a,b]$ にて連続, 開区間 (a,b) にて微分可能かつ $g(a)\neq g(b)$ を満たす関数とする. 関数 $F(x)=(g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$ に平均値の定理を適用することで, 以下のコーシーの平均値の定理を証明せよ.

ある実数 $c \in (a,b)$ が存在して, 等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{または} \quad f'(c) = g'(c) = 0$$

が成り立つ.

3.4.6 関数 $F(x)$ について $F(a) = F(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$ が成立ち, また明らかに微分可能であり, $F'(x) = (g(b)-g(a))f'(x) - (f(b)-f(a))g'(x)$ を満たす. 平均値の定理を適用すると, ある $c \in (a,b)$ が存在して, $F'(c) = 0$, すなわち $(g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)$ が満たされる.

よって, もし $g'(c) \neq 0$ ならば, 両辺を $(g(b)-g(a))g'(c)$ で割算し $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ を得る. もし $g'(c) = 0$ ならば, 両辺を $(g(b)-g(a))$ で割ることで, $f'(c) = 0$ を得る. 以上で主張を得る.

演習問題 3.5.1 次のべき級数の収束半径を求めよ.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n,\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}}x^n,\qquad (3)\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}.$$

3.5.1 (1) $a_n=\dfrac{1}{n2^n}$ とおく.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{2(1+\frac{1}{n})}\right|=\frac{1}{2}$$

であり, 収束半径 $R=2$ が従う.
(2) $a_n=\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$ とおく.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|&=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}}}{\frac{(2n)!}{n^{2n}}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2(n+1)}}\right|\\&=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\left(2+\dfrac{2}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\right|=\frac{4}{e^2}\end{aligned}$$

が成り立つ. 収束半径は $R=\dfrac{e^2}{4}$.
(3) c を実数の定数とする. $x=c$ を代入して得られる級数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}c^{2m-1}$ を考える. 各項をその絶対値に置き換えた正項級数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)!}|c|^{2m-1}$ について, ダランベールの判定法を適用する. $a_n=\dfrac{1}{(2m-1)!}|c|^{2m-1}$ とおき,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{(2m+1)!}|c|^{2m+1}}{\dfrac{1}{(2m-1)!}|c|^{2m-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|c|^2}{(2m+1)2m}=0.$$

よって $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}c^{2m-1}$ は絶対収束する. c は任意定数だったので, 収束半径の定義より $R=+\infty$ である.

演習問題 3.5.2 (巾級数としての余弦関数) 系 3.5.1 にて考察した関数 $f(x)=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を $-2<x<2$ の範囲にて描け.
(2) 加法定理 $f(a+b)=f(a)f(b)-f'(a)f'(b)$ が成り立つことを示せ.
(3) 等式 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ が成り立つことを示せ.
(4) $f(x)$ は周期関数であることを示せ.

3.5.2 (1) 式の形より $f(x)$ は明らかに偶関数である. 系 3.5.5 にて考察した増減表を基に, グラフ $y=f(x)$ の概形を描くとこが出来る.
(2) $G(x)=f(a+b-x)f(x)-f'(a+b-x)f'(x)$ と置く. 例題 3.5.1 より, $f(x)$ は $f''(x)=-f(x)$ を満たす. 微分して $G'(x)=-f'(a+b-x)f(x)+f(a+b-x)f'(x)+f''(a+b-x)f'(x)-f'(a+b-x)f''(x)$

を得るが, 右辺は恒等的に 0 である．すなわち $G(x)$ は定数であり, 特に $G(0)=G(b)$ が成り立つ．$f(0)=1$, $f'(0)=0$ に留意して, 等式 $f(a+b)=f(a)f(b)-f'(a)f'(b)$ を得る．
(3) 上で得られた加法定理において, $a=\dfrac{\pi}{2}$, $b=-\dfrac{\pi}{2}$ とする．$f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)-f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるが, $f(x)$ は偶関数, $f'(x)$ は奇関数なので, $1=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$ が従う．$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pm 1$ だが, 系 3.5.5 の増減表によると $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ は負の値, すなわち -1 であることがわかる．
(4) 加法定理の等式において, $b=\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}$ とおくことで $f\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)=f'(a)=-f\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)$ を得る．$a-\dfrac{\pi}{2}$ を改めて a と置き直すと $f(a+\pi)=-f(a)$, すなわち $f(a+2\pi)=f(a)$ を得る．a は任意定数であったので, $f(x)$ は 2π を周期とする周期関数である．

演習問題 3.5.3 次のべき級数を考える．

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

(1) 部分和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-x)^n$ の $N\to+\infty$ での収束発散を調べることで, 収束半径 R を求めよ．
(2) 開区間 $(-R,\,R)$ において, x の関数として以下に述べる等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

(3) 開区間 $(-R,\,R)$ において (2) にて得られた等式を項別積分することで, 関数 $\log(1+x)$ の級数としての表示を求めよ．

3.5.3 (1) $S_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-x)^n$ とおく．$-xS_N-S_N=(-x)^{N+1}-1$ であり, $x\neq -1$ ならば, $S_N=\dfrac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}$ である．よって $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}S_N$ が収束するための必要十分条件は $-1<x<1$ であることがわかる．収束半径の定義より $R=1$ が従う．
(2) $x\in(-1,1)$ のとき $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}S_N=\frac{1}{1+x}$ であるので $\displaystyle\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ が従う．
(3) 上で得られた等式の右辺はべき級数なので, 開区間 $(-1,1)$ において項別積分可能である (定理 3.4.5).

$$\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t)^n dt$$

すなわち

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

を得る．

演習問題 3.5.4 ($\tan^{-1}x$ のべき級数表示) 以下の問に答えよ．
(1) 開区間 $(-1,\,1)$ において, x の関数として以下に述べる等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{m=0}^{\infty}(-x^2)^m$$

(2) 開区間 $(-1,\,1)$ において (1) にて得られた等式を項別積分することにより, 関数 $\tan^{-1}x$ の級数としての表示が以下で与えられることを示せ．

$$\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{(-1)^m}{2m+1}x^{2m+1}+\cdots$$

3.5.4 (1) 例えば **3.5.3** にて得られた等式 $\displaystyle\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, $x\in(-1,1)$ において, x に x^2 を代入することで

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{m=0}^{\infty}(-x^2)^m,\qquad(-1<x<1)$$

を得る.

(2) 上の等式において, 右辺は x についてのべき級数である. $x \in (-1, 1)$ として, 項別積分すると

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^x (-t^2)^m dt.$$

すなわち,

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^m}{2m+1}x^{2m+1} + \cdots$$

を得る.