演習問題解答

2.1.1 (1) $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\tan\frac{5\pi}{3}=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

2.1.2 (1) $\sin^2 x=1-\cos^2 x=\frac{8}{9}$. ここで, $0\leqq x\leqq\pi$ より $\sin x>0$ であるので、 $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (2) $\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{24}{25}$. ここで, $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3\pi}{2}$ より、$\cos x<0$ であるので、 $\cos x=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (3) 加法公式より、$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=-1$. $\tan x=2>1=\tan\frac{\pi}{4},\tan y=3>1=\tan\frac{\pi}{4}$ より、$\frac{\pi}{4}<x,y<\frac{\pi}{2}$ であるから、$\frac{\pi}{2}<x+y<\pi$ となり、$x+y=\frac{3\pi}{4}$ となる。

2.1.3 (1) 積和の公式を用いて、

$$\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} &= \frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(2) 積和の公式を用いて、

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{11\pi}{12} &= \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{11\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

(3) 和積の公式を用いて、

$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12} &= 2\cos\frac{\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}\\ &= 2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(4) 和積の公式を用いて、

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{11\pi}{12} &= 2\cos\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{11\pi}{12}}{2}\\ &= 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

2.1.4 (1) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ (2) $\frac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{5}}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$ (3) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$ (4) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[6]{3^6}=3$ (5) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}}=\frac{3}{5}$ (6) $a^{\frac{3}{4}}a^{-\frac{1}{3}}\div a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{9-4-6}{12}}=a^{-\frac{1}{12}}$

2.2.1 (1) $y=3x-1$ を x について解いて、$x=\dfrac{y+1}{3}$. 定義域 $\boldsymbol{R}$, 値域 $\boldsymbol{R}$ である。
(2) $y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ を x について解くと、$x=\pm\sqrt{y+2}-1$ となり、逆関数は $y=x^2+2x-1$ の x,y を一対一対応にするために定義域を $x\geqq -1$ と制限すると $x=\sqrt{y+2}-1$ となり、 定義域を $x\geqq -1$ に制限すると、$x=-\sqrt{y+2}-1$ となる．逆関数の定義域はどちらも $y\geqq -2$, 値域は前者は $x\geqq -1$, 後者は $x\leqq -1$ となる。勿論、$y=x^2+2x-1$ の定義域を上記のように自然にとるのではなく、例えば $[0,1]$ と $(-\infty,-1)$ の和集合ととっても、x,y は一対一対応になり、その定義域に対して、逆関数はでき、それも正解である。しかしその場合、関数の連続性はなくなる。
(3) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ の定義域は分母が 0 にならないように $x\neq -1$。$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ を x について解いて、逆関数は $x=\dfrac{-1-y}{y-2}$, よって、逆関数の定義域は分母が 0 にならないように $y\neq 2$ で, 値域は $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ の定義域であった $x\neq -1$ である。

2.2.2 (1) $\dfrac{\pi}{6}$ (2) $\dfrac{\pi}{4}$ (3) $\dfrac{\pi}{6}$ (4) $-\dfrac{\pi}{6}$ (5) $-\dfrac{\pi}{4}$ (6) $\dfrac{5\pi}{6}$ (7) $\dfrac{\pi}{2}$

2.2.3 (1) $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ に対して、$-y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ であり、$\sin(-y)=-\sin y$ であるので、両辺の $\sin^{-1}$ を取ると、$-y=\sin^{-1}(-\sin y)$。よって、$x=\sin y$ とすると、$x\in[-1,1]$ で、$\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$ が成り立つ。
(2) $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して、$-y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ であり、$\tan(-y)=-\tan y$ であるので、両辺の $\tan^{-1}$ を取ると、$-y=\tan^{-1}(-\tan y)$。よって、$x=\tan y$ とすると、$x\in\boldsymbol{R}$ で、$\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$ が成り立つ。
(3) $y\in[0,\pi]$ に対して、$\pi-y\in[0,\pi]$ であり、$\cos(\pi-y)=-\cos y$ であるので、両辺の $\cos^{-1}$ を取ると、$\pi-y=\cos^{-1}(-\cos y)$。よって、$x=\cos y$ とすると、$x\in[-1,1]$ で、$\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$ が成り立つ。
(4) $x\in[-1,1]$ に対して、$y=\sin^{-1}x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ とすると、$\dfrac{\pi}{2}-y\in[0,\pi]$ であり、$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin y=x$ となるので、$\dfrac{\pi}{2}-y=\cos^{-1}x$。したがって、$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$。

2.2.4 (1) $y=\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ とすると、$y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ であり、$\sin y=\dfrac{3}{5}$。さらに、$\cos^2 y=1-\sin^2 y=\dfrac{16}{25}$ であるので、$\cos y=\dfrac{4}{5}$。したがって、$x=\tan y=\dfrac{\sin y}{\cos y}=\dfrac{3}{4}$。
(2) $y=\tan^{-1}\sqrt{2}$ とすると、$\tan y=\sqrt{2}$ であり、$3=1+\tan^2 y=\dfrac{1}{\cos^2 y}$. よって、$\cos^2 y=\dfrac{1}{3}$。ここで、$y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるので、$\cos y>0$。よって、$\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。 $x=\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ より、$\cos^{-1}x=\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{12}$。よって、

$$x=\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(4) $y=\cos^{-1}\dfrac{4}{5}$ とすると、$y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。また、$\sin^2 y=1-\cos^2 y=\dfrac{9}{25}$。$\sin y>0$ より、$\sin y=\dfrac{3}{5}$。したがって、$x=\sin y=\dfrac{3}{5}$。

2.2.5 (1) $x=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}, y=\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ とすると、$\tan x=\dfrac{1}{2}, \tan y=\dfrac{1}{3}<1=\tan\dfrac{\pi}{4}$ より、$x,y\in\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ である。よって $x+y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。一方、$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=1$ であるので、$x+y=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$。
(2) $x=\tan^{-1}\dfrac{1}{3}, y=\tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ とすると、

$$\tan(2x+y)=\frac{\tan 2x+\tan y}{1-\tan 2x\tan y}=\frac{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+\tan y}{1-\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\tan y}=1$$

一方、$x,y\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるので、$2x+y\in(0,\pi)$ であるので、$2\tan^{-1}\dfrac{1}{3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{7}=2x+y=\dfrac{\pi}{4}$。

2.2.6 (1) $\log_3 24+\log_3\dfrac{9}{8}=\log_3 27=3$ (2) $2\log_5\sqrt{50}-\log_5 2=\log_5 50-\log_5 2=\log_5 25=2$ (3) $\log_{10}\dfrac{2}{15}-\log_{10}\dfrac{8}{75}+\dfrac{1}{2}\log_{10}64=\log_{10}\dfrac{2}{15}\cdot\dfrac{75}{8}\cdot 8=\log_{10}10=1$ (4) $\log_3\dfrac{3}{5}+2\log_9\dfrac{5}{3}=\log_3\dfrac{3}{5}+2\dfrac{\log_3\frac{5}{3}}{\log_3 9}=\log_3\dfrac{3}{5}+\log_3\dfrac{5}{3}=\log_3 1=0$

2.2.7 (1) $\log_5(2x+9)=\log_5(x+1)+1$ であるから、$\log_5\dfrac{2x+9}{x+1}=1$。よって、$\dfrac{2x+9}{x+1}=5$。これを解いて、$x=\dfrac{4}{3}$ (2) $\log_3 x=t$ と置くと、$(\log_3 x)^2-\log_3 x^4-5=t^2-4t-5=(t-5)(t+1)=0$。よって、$t=5,-1$ であり、$x=243, \dfrac{1}{3}$。

2.4.1 (1) $\lim_{x\to 2}(x^3-x^2+2x-5)=2^3-2^2+2\cdot 2-5=3$ (2) $\lim_{x\to-\infty}(x^3-x^2+2x-5)=\lim_{x\to-\infty}x^3(1-\dfrac{1}{x}+2\dfrac{1}{x^2}-5\dfrac{1}{x^3})=-\infty$ (3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-2x+4}{x^2-x-2}=\dfrac{1-2-2+4}{1-1-2}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$
(4) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-2x+4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2-2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-2}{x+1}=\dfrac{2}{3}$
(5) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+4}{x^3+x^2-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{x+1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=0$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-2x^2+x-5}{3x^3+x^2-4x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{3+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{4}{3}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3-3x^2+5x-1}{x^2+x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x-3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=-\infty$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-3x^2+5x-1}{x^2+x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=-\infty$

(9)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} &= \lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\ &= \lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$ (11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$ (12) $n\in\boldsymbol{N}$ に対して、$x=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$ とすると、$n\to\infty$ の時、$x\to0$ であり、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}=1$。一方、$x=\dfrac{2}{(2n+3)\pi}$ とすると、$n\to\infty$ の時、$x\to0$ であり、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(2n+3)\pi}{2}=-1$ となり、振動する。

2.4.2 (1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{|x^3-1|}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1+0}(x^2+x+1)=3,\ \lim_{x\to1-0}\frac{|x^3-1|}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{-x^3+1}{x-1}=-\lim_{x\to1-0}(x^2+x+1)=-3$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{|x-1|}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=\infty,\ \lim_{x\to1-0}\frac{1}{|x-1|}=\lim_{x\to1-0}-\frac{1}{x-1}=\infty$

(3)

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\infty$$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{(x+1)(x-1)}=-\infty$$

(4) x を正の方向から 0 に近づけると、$\sin x$ は正の方向から 0 に近づくので、$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sin x}=\infty$, 逆に x を負の方向から 0 に近づけると、$\sin x$ は負の方向から 0 に近づくので、$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{\sin x}=-\infty$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}[x]=\lim_{x\to1+0}1=1$,

$\lim_{x\to 1-0}[x] = \lim_{x\to 1-0} 0 = 0$,　(6) $\lim_{x\to +0}([x]+[1-x]) = \lim_{x\to +0}(0+0) = 0$, $\lim_{x\to -0}([x]+[1-x]) = \lim_{x\to -0}(-1+1) = 0$。

2.4.3 (1) $-x^2 \leqq x^2 \sin\dfrac{1}{x} \leqq x^2$ であるので、はさみうちの原理より、$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0$。　(2) $-\dfrac{1}{x^2} \leqq \dfrac{\sin x}{x^2} \leqq \dfrac{1}{x^2}$ であるので、はさみうちの原理より、$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2} = 0$。　(3) $-\dfrac{1}{x^2+1} \leqq \dfrac{\cos x}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x^2+1}$ であるので、はさみうちの原理より、$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+1} = 0$。

2.4.4 (1) $\lim_{x\to +0}\dfrac{x}{|x|} = \lim_{x\to +0}\dfrac{x}{x} = 1$、$\lim_{x\to -0}\dfrac{x}{|x|} = \lim_{x\to +0}\dfrac{x}{-x} = -1$。よって、$x=0$ で連続でない　(2) $x \neq 0$ では、連続関数である絶対値関数と、多項式関数の分数になっているので連続である。次に $x=0$ での連続性について調べる。$\lim_{x\to +0}\dfrac{x^3+x^2}{|x|} = \lim_{x\to +0}\dfrac{x^3+x^2}{x} = \lim_{x\to +0}(x^2+x) = 0$, $\lim_{x\to -0}\dfrac{x^3+x^2}{|x|} = \lim_{x\to -0}\dfrac{x^3+x^2}{-x} = -\lim_{x\to +0}(x^2+x) = 0$。よって、$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在し、$f(0)=0$ と一致する。以上より、$f(x)$ は連続関数である。　(3) $-x \leqq x\cos\dfrac{1}{x^2} \leqq x$ であるので、はさみうちの原理より、$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x^2} = 0 \neq 1 = f(0)$。したがって、$f(x)$ は $x=0$ で連続でない。

2.4.5 (1) $f(x) = 2^x - 4x - 3$ とすると、$f(x)$ は連続関数である。$f(4) = -3 < 0$、$f(5) = 9 > 0$ であるので、中間値の定理より、$f(x_0) = 0$ なる $x_0 \in [4,5]$ が存在する。　(2) $f(x) = \cos x - x\sin x$ とすると、$f(x)$ は連続関数である。$f(\pi) = -1 < 0$、$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} > 0$ であるので、中間値の定理より、$f(x_0) = 0$ なる $x_0 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ が存在する。よって、$\cos x_0 = x_0 \sin x_0$ が成り立つ $x_0 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ が存在する。