演習 1.2.1　解答例

(1) 分母分子を n^2 で割れば，$\frac{1}{n} \to 0$，$\frac{1}{n^2} \to 0$ なので

$$a_n = \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{-5 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \to -\frac{2}{5}.$$

(2) 分母分子を 3^n で割れば，$\left(\pm\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ なので

$$a_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \to \frac{1}{3}.$$

(3) a_n を順次書き下せば，$-1, 1, -1, 1, -1, \cdots$ なので，**例 1.2.2** と同じ数列であり，発散する．

類題
$a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ で定められる数列は発散する．
解答例
a_n を順次書き下せば，$0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \cdots$ なので，一定の値に収束することはない (例 1.2.2 と同様の議論による)．実際，実数 a を $a \leqq 0$ とすれば

$$|a_{4k} - a| = |1 - a| = 1 - a \geqq 1$$

であり，$a \geq 0$ とすれば

$$|a_{4k-2} - a| = |-1 - a| = a + 1 \geqq 1$$

である．従って $|a_n - a|$ が 0 に収束することはない．

(4) a_n を有理化して計算する．$n \geq 2$ とする．

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2-n-1}\right)\left(\sqrt{n^2-n+1} + \sqrt{n^2-n-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2-n+1} + \sqrt{n^2-n-1}\right)}$$
$$= \frac{\{(n^2-n+1) - (n^2-n-1)\}}{\sqrt{n^2-n+1} + \sqrt{n^2-n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2-n+1} + \sqrt{n^2-n-1}}.$$

ここで，$n - 1 < \sqrt{n^2-n+1}$ に注意して，$n \geqq 2$ に対して

$0 < a_n < \dfrac{2}{n-1}$ が成り立つ．はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が得られる．

類題　根号の中の n の 1 次以下の部分の符号を変えるとさまざまな極限値が出現する．
$a_n = \sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$ で定められる数列の極限値は $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$ である．
解答例
上記の解答例と同様に a_n を有理化して計算する．

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+n-1}\right)\left(\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n-1}\right)}$$
$$= \frac{\{(n^2-n+1)-(n^2+n-1)\}}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n-1}} = \frac{-2n+2}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n-1}}.$$

ここで，$n-1 \leqq \sqrt{n^2-n+1} \leqq n+1$, $n-1 \leqq \sqrt{n^2+n-1} \leqq n+1$ より，分子 $= -2n+1 \leqq 0$ に注意して，$n \geqq 2$ に対して

$$\frac{-2n+2}{2(n-1)} = -1 \leqq \quad a_n \quad \leqq \frac{-2n+2}{2(n+1)} = -1 + \frac{2}{n+1}$$

となる．はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$ が得られる．

注意　高校で無理関数 $y = \sqrt{x}$ は連続であることを学びさらに $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ならば $\lim_{n\to\infty} \sqrt{b_n} = \sqrt{b}$ であることを学んでいる（本書では 2 章で再度学ぶ）．この事実を使用して次のように計算しても良い：
上に得られた a_n の分子分母を n で割って

$$a_n = \frac{-2n+2}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n-1}} = \frac{-2+\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} \to \frac{-2}{1+1} = -1.$$

(5)

$$\log(3n-1) - \log(n+1) = \log\left(\frac{3n-1}{n+1}\right) = \log\left(\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

ここで不等式

$$\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \quad \geqq \quad \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \quad , \quad n \geqq 2$$

に注意して

$$\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \quad \geqq \quad \frac{3(1-\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}} \quad \geqq \quad \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \quad , \quad n \geqq 2$$

が成り立つ．ここで数列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は上に有界であり（命題 1.2.3）

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \leqq \quad K < \infty.$$

をみたす定数 K が存在する（命題 1.2.3 によれば $\mathrm{K} = 3$ で十分である）．
従って

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3} \quad \geqq \quad K^{-\frac{3}{n}} \quad , n \geqq 2$$

が得られる．以上から，$n \geqq 2$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$\log 3 \geqq a_n = \log\left(\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) \geqq \log\left(3K^{-\frac{3}{n}}\right) = \log 3 - \frac{3\log K}{n}.$$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \log 3$ となる．

注意　高校で対数関数 $y = \log x$ は連続であることを学びさらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log b_n = \log b$ であることを学んでいる（本書では 2 章で再度学ぶ）．この事実を使用して次のように計算しても良い：

$$\log(3n-1) - \log(n+1) = \log\left(\frac{3n-1}{n+1}\right) = \log\left(\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) \quad \to \quad \log 3.$$

(6) $|\sin n\theta| \leqq 1$ より $|a_n| \leqq \dfrac{1}{n} \quad \to \quad 0.$

(7) $|a_n| = n \to \infty$ より発散する．

注意　収束する数列は有界である．即ちある定数 $L>0$ が存在して

$|a_n| \leqq L,\quad n=1,2,3,\cdots.$

対偶をとれば「有界でない数列は発散する」ことが言える．

演習 1.2.2　解答例

$$a_{n+1}-a_n=\frac{5a_n+4}{2a_n+3}-a_n=\frac{-2(a_n-2)(a_n+1)}{2a_n+3}.$$

この等式から，すべての n に対して $a_n<2$ が成り立てば，$a_{n+1}-a_n>0$ が成り立つ．数学的帰納法により，すべての n に対して $a_n<2$ であることを証明する．

[1]　$n=1$ のときは $a_n=1<2$ が成り立つ．

[2]　$n=k$ のときに成り立つものとして，　$n=k+1$ の場合：

$$2-a_{k+1}=2-\frac{5a_k+4}{2a_k+3}=\frac{2-a_k}{2a_k+3}$$

であるから，帰納法の仮定より $2-a_{k+1}>0$ となり，$n=k+1$ の場合も成り立つ．
従って，すべての n に対して $a_n<2$ である．

数列 $\{a_n\}$ は上に有界かつ単調増加なので収束する．極限値を a とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a$ であるから，等式 $a_{n+1}=\dfrac{5a_n+4}{2a_n+3}$ において $n\to\infty$ として

$$a=\frac{5a+4}{2a+3}$$

が成り立つ．分母を払って整理すれば $a^2-a-2=(a-2)(a+1)=0.$
$a>1$ であるから，求める極限値は $a=2$ である．

演習 1.2.3　解答例
(1)　不等式 $3<(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(2\cdot 3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot 2^{\frac{1}{n}}$ において $n\to\infty$ と

すれば，$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ であるから（命題 1.2.4），はさみうちの原理より，$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$.

(2) 不等式 $3 < (1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} < (3\cdot 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$ において $n\to\infty$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$ であるから（命題 1.2.4），はさみうちの原理より，$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$.

(3) 不等式 $4 < (1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} < (4\cdot 4^n)^{\frac{1}{n}} = 4\cdot 4^{\frac{1}{n}}$ において $n\to\infty$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} 4^{\frac{1}{n}} = 1$ であるから（命題 1.2.4），はさみうちの原理より，$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} = 4$.

演習 1.2.4 解答例

(1) $n=-k$ と置けば $n\to-\infty$ のとき $k\to\infty$ である．さらに

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{k}\right)^{-k} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{-k} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^k$$
$$= \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^k = \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\cdot\left(1+\frac{1}{k-1}\right)$$

において，$\ell = k-1$ と置けば,

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{\ell\to\infty}\left(1+\frac{1}{\ell}\right)^\ell\cdot\left(1+\frac{1}{\ell}\right) = e\cdot 1 = e.$$

(2)
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}.$$

ここで，$n-1=k$ と置けば $n\to\infty$ のとき $k\to\infty$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1} = \frac{1}{e}\cdot 1 = e^{-1}.$$

(3)

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right).$$

ここで，$n-1=k$ と置けば

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right) = e\cdot 1 = e.$$

(4)
$a_n^2 = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$， $a_n > 0$, において $2n = k$ と置けば $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k = e$ である．このとき

$$|a_n-\sqrt{e}| = \frac{|a_n^2-e|}{a_n+\sqrt{e}} \leqq |a_n^2-e| \to 0$$

であるから，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{e}$.

(5)
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

(6)
$$\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2}$$
$$\to e\cdot e\cdot e\cdot 1\cdot 1 = e^3.$$

(7) 命題 1.2.3 により，$\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k, k=1,2,3,\cdots$ は有界数列であるから，ある定数 $K>0$ が存在して，$\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leqq K,\ \ n=1,2,3,\cdots$ となる（$K=e$ で良い）．従って次の不等式が成り立つ：

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}^{\frac{1}{n}} \leqq K^{\frac{1}{n}}.$$

命題 1.2.4 より $\lim_{n\to\infty} K^{\frac{1}{n}} = 1$ であるから，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$ である．

(8) 二項定理により

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} > 1 + n^2 \cdot \frac{1}{n} = 1 + n \to \infty.$$

演習 1.3.1　解答例

(1)
n 部分和を $S_n = a(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})$ とする．$S_n - rS_n = (1-r)S_n$ を計算して $S_n - rS_n = a(1-r^n)$ であるから，$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ である．
$|r| < 1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ なので（例 1.2.3）

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$$

(2)
$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$

演習 1.3.2　解答例

与えられた不等式を $n = 1, 2, 3, \cdots, n-1$ について辺々掛けて

$$\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqq \frac{b_2}{b_1}\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}$$

より，不等式 $a_n \leqq \dfrac{a_1}{b_1}\cdot b_n$ が成り立つ．

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqq \frac{a_1}{b_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \geqq \frac{b_1}{a_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

演習 1.3.3　解答例

(1)　演習 1.3.1 (2) を利用して

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$ より収束する．

注意 本問は次の演習 (2) の特別な場合である．

(2)　$k = 1$ の場合は発散することが分かっている（例 1.3.1）．従って $-\infty < k \leqq 1$ なら $\dfrac{1}{n^k} \geqq \dfrac{1}{n}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ となり発散する．

　$k > 1$ の場合は収束することを示そう．このために n 部分和 $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{3^k} + \cdots + \dfrac{1}{n^k}$ が n によらず有界であることを示す． $k > 1$ であれば分数関数 $y = \dfrac{1}{x^k}$ は減少関数なので，区間 $[j, j+1]$ において，

$$\frac{1}{(j+1)^k} \leqq \frac{1}{x^k}, \quad x \in [j, j+1]$$

である．両辺を積分して

$$\frac{1}{(j+1)^k} \leqq \int_j^{j+1} \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{k-1} \left\{ j^{-k+1} - (j+1)^{-k+1} \right\}, \quad j = 1, 2, 3, \cdots.$$

この不等式を $j = 1, 2, 3, \cdots, n-1$ まで辺々加えて

$S_n \leqq 1 + \dfrac{1}{k-1} \left(1 - n^{-k+1} \right) < 1 + \dfrac{1}{k-1} < \infty$ を得る．即ち n 部分和 S_n は n によらず有界であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ は $k > 1$ のとき収束する．

(3) **ダランベールの判定法** による．

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{3} \cdot e < 1$$

より収束する.

(4) **ダランベールの判定法** による.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{2} \cdot e > 1$$

より発散する.

(5) 分子を有理化して

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}.$$

ここで $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \geqq \sqrt{n}$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}} < \infty$$

となり収束する．ただし本問 (2) を $k = \frac{3}{2} > 1$ として適用した.

(6) 分子を有理化して

$$\frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}}.$$

ここで $\sqrt{n^2+n+1} \leqq 2n$, $\sqrt{n^2-n+1} \leqq 2n$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}}{n} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty$$

となり発散する．ただし 例 1.3.1 を用いている.