

ワイブル形状パラメータ可変での

加速劣化試験によるしきい値の推定

Estimation of Threshold Stress in Accelerated Life-Testing

広瀬 英雄*
Hideo Hirose

内容梗概

加速劣化試験データを用いて、使用ストレス下での平均寿命と、その電圧以下では破壊の起こらないしきい値の推定を行う方法を示した。ストレスと平均寿命の間にはしきい値を含む逆 n 乗則が成り立ち、一定ストレスの下では寿命はワイブル分布に従うとする。ただし、ワイブル形状パラメータはストレスに依存してもよい。従って、このモデルは従来のワイブル逆 n 乗則の拡張になっている。使用電圧下での任意の破壊確率を指定したときの寿命ではなく、平均寿命の最尤推定値のみを知りたいときはこの方法は有効である。つまり、一つのトレードオフである。確率モデルの選定には尤度比検定と赤池の情報量規準が用いられている。右側打ち切りデータも考慮され、いくつかの拡張モデルも試みられている。

Synopsis

We discuss a method, by using accelerated life-test data, to estimate the mean life at the service stress and the threshold stress below which a failure is unlikely to occur. The relation between stress and mean-life at that stress is assumed to follow an inverse power law that includes a threshold stress. The failure times at a given stress are assumed to follow a Weibull distribution in which the shape parameter varies with the stress. This model extends the well-known Weibull inverse power law model. If only the mean life but not a specific percentile point at a service stress is sought, the maximum likelihood method is useful for parameter estimation. This is a tradeoff in the parametric approach. For adoption of an appropriate probability model, the likelihood ratio test as well as the Akaike Information Criterion are used. Type I right-censored data are considered. Extensions of the method are discussed.

1. ま え が き

ストレスと平均寿命の間にはある法則、例えば熱劣化に対するアレニウスの法則、電気的なストレスに対する逆 n 乗則、あるいは多重ストレスに対するEyringの法則が成立していると仮定する。ここでは、この法則をストレス-寿命モデル、SLMと呼ぶ。一定のストレス下では通常、ワイブル分布、グンベル分布(2重指数分布)あるいは対数正規分布が故障確率分布(信頼性分布)として用いられる。ここではこれをFPDと略す。FPDとSLMを組み合わせることにより、加速劣化確率分布モデルを作ることができる。ここでは、従来のワイブル型の逆 n 乗則モデルの一つの拡張について議論する。

SF₆ガストランスの電気絶縁に使用されるPET(ポリエチレンテレフタレート)フィルムの加速劣化試験結果を表1および図1に示す。図1によると、4.7kV近辺にあるしきい値(そのストレス以下では破壊が起こらない)があると考えられる。(ここでいうしきい値は3パラメー

タワイブル分布の位置パラメータのことを指していないことを注意しておく。)しきい値が存在するならば、その値を知ることは重要であり、従ってここではこのしきい値推定について論ずる。

文献⁽¹⁰⁾⁽¹⁶⁾でこの拡張された逆 n 乗則モデル、 $\mu = K(V - V_0)^{-n}$ 、を示している。ここに、 μ 、 V 、 V_0 は平均寿命、使用ストレス、しきい値を表わす。図1を図2のように縦軸を V から $V - V_0$ に変え、 V_0 を4.7kVにすると、先のデータはこの拡張逆 n 乗則モデルによく合致する。従って、 $\mu = KV^{-n}$ のモデルより、 $\mu = K(V - V_0)^{-n}$ のモデルの方が適当であると考えられる。

逆 n 乗則モデルではFPDとしてよくワイブル分布が用いられる。この場合のモデルでしきい値を推定する方法については、文献⁽¹⁰⁾で簡単に、文献⁽⁷⁾では少し詳しく述べられている。ここでは、ワイブルの形状パラメータはストレスによらず一定であると仮定されている。ここではこのモデルを形状パラメータ固定(β -fixed)と呼ぶ。図3は、PETフィルムのワイブルプロットである。図3

*技術本部 技術開発センター

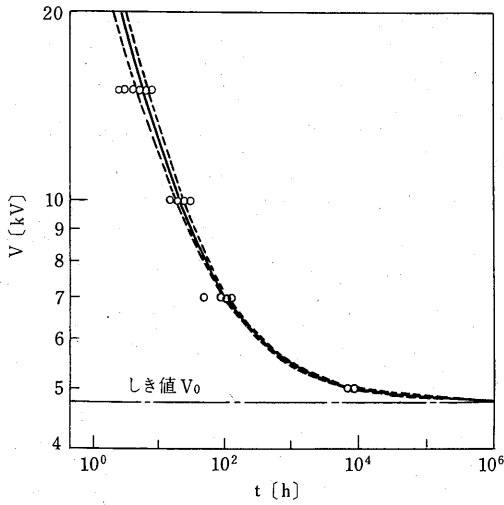


図1 加速劣化試験データ
 実線：平均寿命の推定値
 破線：平均寿命の90%信頼区間

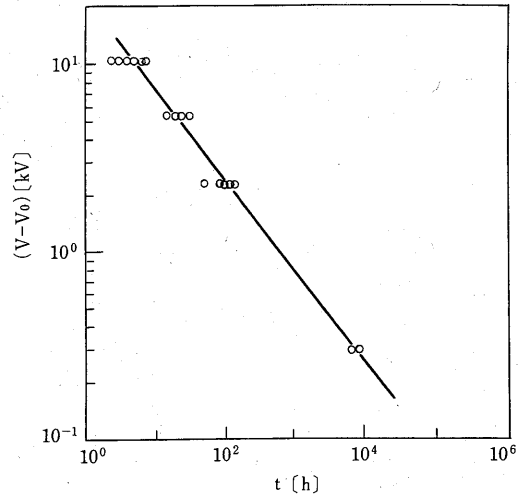


図2 加速劣化試験データ
 図1で V_i を $V_i - V_0$ に代値プロットしたもの

表1 加速劣化試験データ [例1]

V_i (kV)	破壊時刻 $t_{i,j}$ or 試験打ち切り時刻 $T_{i,t}$ (h)
5	7131, 8482, 8559, 8762, 9026, 9034, 9104, T^* , T^* , T^*
7	50.25, 87.75, 87.76, 87.77, 92.90, 92.91, 95.96, 108.3, 108.3, 117.9, 123.9, 124.3, 129.7, 135.6, 135.6
10	15.17, 19.87, 20.18, 21.50, 21.88, 22.23, 23.02, 23.90, 28.17, 29.70
15	2.40, 2.42, 3.17, 3.75, 4.65, 4.95, 6.23, 6.68, 7.30

$T^* = 9104.25$ (打ち切りデータ)

によると、ワイブル形状パラメータはストレスに依存していることがわかる。この条件をここでは形状パラメータ自由 (β -free) と呼ぶ。従って、文献⁽⁷⁾で用いた方法は表1のデータには用いることができない。

打ち切りデータを含む場合の最小2乗法も文献⁽¹³⁾に紹介されているが、ここで扱うしきい値を含み、かつ β -free のモデルには適用できない。ノンパラメトリックな方法 (Basu と Ebrahimi⁽²⁾, あるいは Schmoyer⁽¹¹⁾⁽¹²⁾) は β -free のモデルに有効かもしれないが、しきい値を含んだモデルは適用されていない。

この論文では主に以下の仮定の下でしきい値推定を行う。

- (i) FPD はワイブル型である。
- (ii) β -free の条件が使える。
- (iii) SLM は逆 n 乗則である (ストレスに対する平均寿命)。
- (iv) しきい値が含まれている。
- (v) Type I の打ち切りデータが含まれている (表1を参照)。

これら5つの仮定Aと呼ぶ。

この条件下でしきい値を推定するにはあるトレードオ

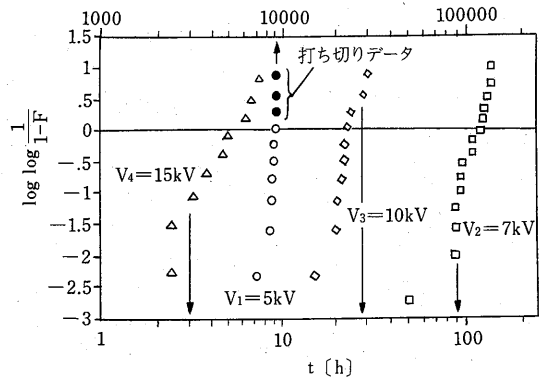


図3 加速劣化試験データのワイブルプロット

フが必要である。 β -fixed モデルでは、あるいは Nelson⁽¹⁰⁾ が示したように β が簡単なストレスの関数である限り、破壊確率が指定されたときの使用ストレス下での寿命の確率分布は計算できる。

一般に β -free のときにはこれは不可能である。しかし、平均寿命のみを求めたいのであればこれは可能で、最尤推定法を用いることができる。最尤推定法によれば、 β -free か β -fixed のどちらがより合理的かも検討することが可能である。尤度比検定と AIC⁽¹⁾ (赤池の情報量規準) はこのモデル選定に有効である。さらに、尤度を使うことで FPD をグンベル分布や対数正規分布に適用したり、SLM として指数分布を用いることもできる。

2. 数学モデルとパラメータ推定法

以下に使用する記号を列挙する。

- V_i レベル i での試験ストレス
- V_0 しきい値
- V_e 使用電圧

$t_{i,j}$	ストレスレベル V_i で観測された寿命 (完全データ)
$T_{i,t}$	ストレスレベル V_i での打ち切り時間 (打ち切りデータ)
$F(t; V_i)$	ストレスレベル V_i での確率分布関数 (Cdf)
$f(t; V_i)$	ストレスレベル V_i での確率密度関数 (pdf)
$\mu(V_i) = \mu_i$	ストレスレベル V_i での平均寿命
$\eta(V_i) = \eta_i$	ワイブル分布 $F(t; V_i)$ での尺度パラメータ
$\beta(V_i) = \beta_i$	ワイブル分布 $F(t; V_i)$ での形状パラメータ
$\text{weif}(x; \beta)$	形状パラメータ β をもつ標準ワイブル分布 $1 - \exp(-x^\beta)$
k, K, n	逆 n 乗則に用いられる定数
m	ストレスレベルの個数
$m_{0,i}$	ストレスレベル V_i での故障観測データ 個数
$m_{1,i}$	ストレスレベル V_i での打ち切りデータ 個数
$\theta_a (a=1, 2, \dots)$	β_i, n, k, V_0 などの未知パラメータ
θ	$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m+3})^T$
$e(\cdot)$	最尤推定値の標準誤差
$\text{cor}(\theta_a, \theta_b)$	分散・共分散行列の要素
λ	尤度比統計量
AIC	赤池の情報量規準
r	未知パラメータ個数
ψ	ディガンマ関数
ψ'	ディガンマ関数の微分値
med	ワイブル分布のメジアン
α, h	指数則モデルでの定数
$\gamma = 0.57722$	Euler の定数
$\xi(V_i) = \xi_i$	グンベル分布 $F(t; V_i)$ での位置パラメータ
$\delta(V_i) = \delta_i$	グンベル分布 $F(t; V_i)$ での形状パラメータ
$\zeta(V_i) = \zeta_i$	δ_i に関連したパラメータ
$u(V_i) = u_i$	対数正規分布 $F(t; V_i)$ での位置パラメータ
$v(V_i) = v_i$	対数正規分布 $F(t; V_i)$ での形状パラメータ

仮定

(1) 仮定 A

各ストレスレベル V_i での寿命 t は形状パラメータ β_i , 尺度パラメータ η_i をもつワイブル分布に従い, これら 2 つのパラメータは V_i に依存すると仮定する。つまり, $\beta_i = \beta(V_i)$, $\eta_i = \eta(V_i)$ 。このとき故障時間の確率分布 $F(t; V_i)$ は,

$$F(t; V_i) = \text{weif}\left(\frac{t}{\eta_i}; \beta_i\right) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right\}. \quad (1)$$

ストレスレベル V_i での平均寿命は,

$$\mu(V_i) = \eta_i \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta_i}\right), \quad (\Gamma(\cdot): \text{ガンマ関数}). \quad (2)$$

次に, $\mu(V_i)$ はしきい値 V_0 をもつ逆 n 乗則に従うと仮定する。つまり,

$$\mu(V_i) = \begin{cases} K(V_i - V_0)^{-n} & (V_i > V_0) \\ \infty & (V_i \leq V_0), \end{cases} \quad (3)$$

ここに, n, K, V_0 はストレスレベル V_i に無関係な定数とする。 $V_0 = 0$ のとき, (3) 式は通常の逆 n 乗則であるから, これは一つの逆 n 乗則の拡張になっている。Bolotin⁽³⁾ はこの V_0 を鉄鋼の疲労極限と表現しているし, 電気絶縁の場合, 耐電圧極限とも呼ばれたりする。ここでは V_0 をしきい値と呼ぶことにする。

(2), (3) 式を組み合わせることにより, 尺度パラメータ η_i は次のように書ける,

$$\eta_i = \left[\{k(V_i - V_0)\}^n \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta_i}\right) \right]^{-1} \quad (K^{-1} = k^n). \quad (4)$$

これを(4)式のワイブル分布に代入すれば,

$$F(t; V_i) = 1 - \exp\{-z_i(t)^{\beta_i}\}, \quad (5)$$

$$z_i = \{k(V_i - V_0)\}^n \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta_i}\right) t, \quad (6)$$

を得る。(5)式に対応する密度関数は

$$f(t; V_i) = \frac{\beta_i}{t} z_i(t)^{\beta_i} \exp\{-z_i(t)^{\beta_i}\} \quad (7)$$

となる。

β_i が V_i と独立なら(つまり β -fixed), $\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta_i}\right)$ は定数 k の中に含まれる。(このモデルは Hirose⁽⁷⁾ で扱われている。)しかし, β_i が V_i に依存するなら, 対数尤度関数は(8)式のように書くことができる。

$$\log L = \log \left(\prod_{i=1}^m \left[\prod_{j=1}^{m_{0,i}} f(t_{i,j}) \right] \cdot \left[\prod_{j=1}^{m_{1,i}} \{1 - F(T_{i,t})\} \right] \right) \quad (8)$$

未知パラメータは $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, n, k, V_0$ であるから, 次の尤度方程式を解く必要がある。

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_i} = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial n} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial k} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial V_0} = 0 \quad (12)$$

未知パラメータの個数は $m+3$ 個である。ここで簡単のため次の略記を用いる。

$$\begin{aligned} \theta &= (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m+3})^T \\ &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, n, k, V_0)^T \end{aligned} \quad (13)$$

(9)~(12)の尤度方程式をニュートンラフソン法を用いて解くために、テイラー展開を行う。

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta_a} \approx \frac{\partial \log L}{\partial \theta_a} \Big|_{\hat{\theta}} + (\theta - \hat{\theta}) \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_a \partial \theta_b} \Big|_{\hat{\theta}}$$

(a, b=1, \dots, m+3) (14)

ここで、対数尤度関数に表われる1次と2次の微分が必要になるが、(15)、(16)式によると $\log(1-F)$ の微分は $\log f$ の微分と同様になるので、ここでは $\log f$ の1次、2次微分のみを付録Aに示しておく。

$$\log f = \sum_i \sum_j \{ \log \beta_i - \log t_{ij} + \beta_i \log z_i(t_{i,j}) - z_i(t_{i,j})^{\beta_i} \} \quad (15)$$

$$\log(1-F) = \sum_i \sum_j \{ -z_i(T_{i,j})^{\beta_i} \} \quad (16)$$

推定値の標準誤差の計算にはフィッシャーの情報行列(付録B)が用いられる。関数 $g(\hat{\theta})$ の標準誤差は、

$$e(g(\hat{\theta})) = \sum_a \sum_b \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_a} \cdot \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_b} \Big|_{\hat{\theta}} \cdot \text{cov}(\theta_a, \theta_b) \quad (17)$$

によって計算される。ここに、 $\text{cov}(\hat{\theta}_a, \hat{\theta}_b)$ はフィッシャーの情報行列の逆行列の(a, b)要素に相当する。これをデルタ法と言う。平均寿命の標準誤差は μ を $g(\theta)$ と考えることにより得られる。

3. モデル選定法

尤度比検定は、確率分布が同じであれば、 β -free モデルと β -fixed モデルのいずれが適合するかを検定するのに使用される方法の一つである。

帰無仮説は H_0 (すべての a に対して $\beta_a = \beta$) と表わされ、対立仮説は H_1 ($\beta_a \neq \beta_b, a \neq b$) と表わされる。(18)式で示される規準 λ は自由度 ν をもつカイ2乗分布に従う。

$$\lambda = -2 \left\{ \log \frac{L_{\max}(H_0)}{L_{\max}(H_1)} \right\} = -2 \{ \log L_{\max}(H_0) - \log L_{\max}(H_1) \} \quad (18)$$

H_0 と H_1 でのパラメータ数の差はストレスレベル-1なので、 $\nu = m - 1$ 。もし、 $\lambda < \chi^2(p; \nu)$ ならば、帰無仮説が $1-p$ 有意水準で採択される。

2つの λ が以下の例で用いられる。1つは λ_{shape} で、すべてのレベル i での β が同じと見てよいかどうかを検定するものである。SLMの仮定はこれには含まれていない。これは、Nelson⁽¹⁰⁾に示されているように $m+1$ 個の未知パラメータ ($\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \beta$) を含む尤度方程式を解くことによって得られる。もう1つは λ_{model} で、(5)、(6)式から作られるモデルが採択されるかどうかを検定するものである。この規準では、SLMとFPDの両方が仮定されているので β -free モデルと β -fixed モデルのいずれが適当であるかを検定するには、 λ_{shape} よりも λ_{model} の方が優れている。

AIC⁽¹¹⁾もまた確率分布モデルを選定するのに用いられている。AICは、

$$\text{AIC} = -2 \cdot (\log L_{\max} - r) \quad (19)$$

と表わされる。ここに r は未知パラメータの個数である。AICが小さい程モデルが適合していると考えられる。AICは異なる確率分布モデルの選定に用いられる。

4. 適用例

例1では表1のデータを用いて β -free モデルと β -fixed モデルの比較を行う。例2では表3のデータを用いる。

4.1 例1: β -free モデルが適切である場合 仮定

(i) 仮定A

表1に示されるデータの形状パラメータ β の最尤推定値は、

ストレス (kV)	$\hat{\beta}$	90%信頼区間
5	19.52	[8.30, 30.75]
7	5.65	[3.69, 7.61]
10	6.19	[3.77, 8.60]
15	2.99	[1.68, 4.30]

である。推定値の90%信頼区間は共通部分が空なので、形状パラメータが一定であるとは考えられない。尤度比検定を行うと、もっと正確に計算できる。

$$\lambda_{\text{shape}} = -2 \{ \log(L_{\max}(H_0; \text{shape})) - \log(L_{\max}(H_1; \text{shape})) \} = -2 \{ -178.56 - (-57.74 - 67.58 - 28.13 - 17.43) \} = 15.33, \quad (20)$$

で、ストレスレベルの個数は4なので $\chi^2(0.95; 3) = 7.82 < \lambda_{\text{shape}}$ なので β -free モデルが採択される。従って、第3節で述べた β -free モデルでの推定法がしきい値推定に有効と考えられる。

しかし、 λ_{model} には、SLMで用いられる k, n, V_0 が含まれているので λ_{model} を使うのがより適切と考えられる。

β -free モデルと β -fixed モデルのいずれが有効であるかを検定するには λ_{model} を用いた検定がより正確である。

$$\lambda_{\text{model}} = -2 \{ \log(L_{\max}(H_0; \text{model})) - \log(L_{\max}(H_1; \text{model})) \} = -2 \{ -177.47 - (-173.03) \} = 8.87. \quad (21)$$

$\chi^2(0.95; 3) = 7.82 < \lambda_{\text{model}}$ なので、この結果は、 β -fixed モデルよりも β -free モデルがより適切であることを示している。しかし、決定的にそうであるとはこの数値からは言えない。

β -free モデルでは、未知パラメータとそれらの標準誤

(注)

AICは対数尤度に対する相対的な割合で評価されるのではなく、絶対値の大きさそのもので評価される。

差は,

パラメータ	推定値	標準誤差	90%信頼区間
β_1	1.61	0.525	[2.56, 2.91]
β_2	1.98	0.578	
β_3	2.13	0.616	
β_4	3.96	2.17	
β_5	1.78	0.562	
n	1.68	0.168	
k	0.0151	0.00348	
V_0	2.74	0.108	

である。

しきい値以下でのストレスでの平均寿命は計算できないので、4.8kV から 5.0kV の間で(3)式で計算される推定値と(17)式で計算される標準誤差のみを表 2 に示す。(3)と(17)両式には β の値は出てこないことに注意せよ。図 1 に、平均寿命(実線)とその90%信頼区間(破線)とを示す。

β -free モデルは尤度比検定により確認されたけれども、あえて β -fixed モデルのパラメータの推定値とその誤差を求めると、

パラメータ	推定値	標準誤差	90%信頼区間
β	4.99	0.640	[4.71, 4.81]
n	1.96	0.0746	
k	0.0409	0.00255	
V_0	4.76	0.0307	

となる。平均寿命とその標準誤差は表 2 に示される。

表 2 平均寿命の最尤推定値と標準誤差
(例 1 で使用電圧を V_0 としたとき)

ストレス (kV)	β -free モデル		β -fixed モデル	
	推定値 (k 時間)	標準誤差 (k 時間)	推定値 (k 時間)	標準誤差 (k 時間)
V_0				
4.80	319	427	334	432
4.85	62.1	24.8	61.9	25.4
4.90	25.7	4.12	25.4	4.95
4.95	14.0	.842	13.8	1.52
5.00	8.84	.179	8.86	.652

β -free モデルでは β -fixed モデルよりも平均寿命の標準誤差が小さく(特に 5.0kV 付近)、このことは β -free モデルがより適切であることを示していると考えられる。

(注)

この計算結果をもとに、実際の使用電圧は下側信頼限界よりもはるかに低い電圧 (2.0kV 近辺) に設定されている

4.2 例 2 : β -fixed モデルが適切である場合 仮定

(i) 打ち切りデータが含まれていないことを除けば仮定 A と同じ。

表 3 に示されるデータの形状パラメータ β の最尤推定値は、

表 3 加速劣化試験データ [例 2]

ストレス (kV/mm)	破壊時刻 t_{ij} (時間)
3	3487, 3580, 7884, 9894, 19260, 21300
4	397.4, 445.6, 592.3, 688.8, 707.0, 1642
10	25.2, 44.4, 44.5, 46.4, 58.1, 92.2
15	9.9, 11.9, 12.4, 15.9, 20.1
20	6.8, 7.4, 8.0, 11.7, 18.3, 23.0

ストレス (kV/mm)	$\hat{\beta}$	90%信頼区間
3	1.61	[0.75, 2.47]
4	1.95	[1.01, 2.88]
7	2.68	[1.35, 4.01]
10	4.16	[1.84, 6.48]
15	2.22	[1.08, 3.37]

である。推定値の 90%信頼区間の共通部分は [1.84, 2.47] であり、 β -fixed モデルが適用できることを示唆している。尤度比検定を行うと、

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{shape}} &= -2[\log(L_{\max}(H_0; \text{shape})) \\ &\quad - \log(L_{\max}(H_1; \text{shape}))] \\ &= -2[-165.80 - (-60.90 - 43.87 \\ &\quad - 26.44 - 13.56 - 18.91)] = 4.21 \end{aligned} \quad (22)$$

で、ストレスレベルの個数 = 5 より、 $\chi^2(0.95; 4) = 9.49 > \lambda_{\text{shape}}$ となり、 β -fixed モデルの方が支持される。さらに、 λ_{model} を計算すると、

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{model}} &= -2[\log_{\max}(H_0; \text{model}) \\ &\quad - \log(L_{\max}(H_1; \text{model}))] \\ &= -2[-167.57 - (-166.63)] = 1.88 \end{aligned} \quad (23)$$

となり、 $\chi^2(0.95; 4) = 9.49 > \lambda_{\text{model}}$ より、 β -fixed モデルの方がやはり支持される。

β -fixed モデルでの、未知パラメータとそれらの標準誤差は、

パラメータ	推定値	標準誤差	90%信頼区間
β	2.05	0.286	[2.64, 2.90]
n	1.60	0.131	
k	0.0129	0.00248	
V_0	2.77	0.0785	

である。平均寿命とその標準誤差を表 4 に示す。

仮説検定の結果に反して β -free モデルを採用して、パラメータの推定値とその標準誤差を求めると、

パラメータ	推定値	標準誤差	90%信頼区間
β_1	1.61	0.525	
β_2	1.98	0.578	
β_3	2.13	0.616	
β_4	3.96	2.17	
β_5	1.78	0.562	
n	1.68	0.168	
k	0.0151	0.00348	
V_0	2.74	0.108	[2.56, 2.91]

となり、平均寿命とその標準誤差は表4に示されるとおりである。

β -fixed モデルから計算される信頼区間は特に $V_0=3.0$ kV/mm 付近で β -free モデルから計算されるそれよりも狭くなっている。

表4 平均寿命の推定値と標準誤差
[例2で、使用電圧を V_0 としたとき]

ストレス V_0 (kV)	β -free モデル		β -fixed モデル	
	推定値 (k 時間)	標準誤差 (k 時間)	推定値 (k 時間)	標準誤差 (k 時間)
2.80	118	250	371	1540
2.85	44.7	43.2	66.4	72.7
2.90	24.3	13.4	29.5	15.2
2.95	15.5	5.56	17.3	5.10
3.00	10.9	2.83	11.6	2.34

5. 他のモデル選定法とモデル変更

5.1 AIC モデル選定法

上の2つの例について、AIC を適用してみると、例1については、

$$AIC_{\beta\text{-free}} = -2(-173.03 - 7) = 360.06, \quad (24)$$

$$AIC_{\beta\text{-fixed}} = -2(-177.47 - 4) = 362.93, \quad (25)$$

より、 β -free モデルが、例2については、

$$AIC_{\beta\text{-free}} = -2(-166.63 - 8) = 349.26, \quad (26)$$

$$AIC_{\beta\text{-fixed}} = -2(-167.57 - 4) = 343.14, \quad (27)$$

より、 β -fixed モデルが妥当であることがわかる。

AIC の値により適切なモデルの選定を行うことができるが、有意水準を決めることはむづかしい。有意水準を得ようと思えば、ブートストラップ⁽⁶⁾のような他の方法に依らざるを得ない。ブートストップ法によると、2つの異なったモデルのAICの差の確率分布のシミュレーションができるが、ここでは自由パラメータ数が大きすぎるのでその計算は断念している。

第1節で述べているように、いくつかの仮定を変更することで、ここで提案する方法は他のモデルにも以下のように拡張が可能である。

5.2 SLM の変更 (平均寿命をメジアンへ)

(2)式で平均寿命 μ をメジアン $med = \eta(\log 2)^{1/\beta}$ に変更

することにより、(6)式は

$$z_i(t) = \{k(V_i - V_0)\}^n (\log 2)^{1/\beta} t \quad (28)$$

になる。対数尤度の微分は付録Aと同様な方法により計算できる。

5.3 SLM の変更 (逆 n 乗則を指数則へ)

逆 n 乗則は他のモデル、例えば指数則に変更可能である。Dakin⁽⁴⁾はしきい値を含む指数則モデルを提案し、Simoni⁽¹⁵⁾はそれを次の式のように拡張している。

$$\mu(V_i) = \frac{\alpha}{V_i - V_0} \exp(-h V_i) \quad (V_i > V_0)$$

$$= \infty \quad (V_i \leq V_0) \quad (29)$$

ここに、 α と h は定数である。この指数則を SLM とし、ワイブル分布を組み合わせることにより、(6)式の $z_i(t)$ は

$$z_i(t) = k(V_i - V_0) \{\exp(h V_i)\} t \quad (30)$$

となる。このモデルに対しての適用例は文献⁽⁶⁾に紹介されているが、データは例2のものと全く同じであり、文献⁽⁶⁾では、

$$AIC_{\beta\text{-fixed}}(\text{exponential model})$$

$$= -2(-169.24 - 4) = 346.48 \quad (31)$$

のAICの値が示されているから、逆 n 乗則の採用が支持されている。

5.4 FPD の変更 (グンベル分布, 対数正規分布)

故障時間に対する確率分布はワイブル分布からグンベル分布あるいは対数正規分布へと変更が可能である。グンベル分布の確率分布は、

$$F(t; V_i) = 1 - \exp[-\exp(t - \xi_i)/\delta_i] \quad (32)$$

で、 δ_i , ξ_i は尺度、位置パラメータである。対数正規分布の確率分布は、

$$F(t; V_i) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_i} \exp\left\{-\frac{(\log t - u_i)^2}{2v_i^2}\right\} dt \quad (33)$$

で、 v_i , u_i は尺度、位置パラメータである。これらの確率分布を比較するのにAICは有効であると考えられる。しかし、例1ではこのことについて深く追求してはいない。なぜなら、

$$\log(L_{\max}(\text{Weibull})) \approx \log(L_{\max}(\text{Gumbel}))$$

$$\log(L_{\max}(\log\text{-normal})) < \log L_{\max}(\text{Weibull})$$

であり、このことは対数正規分布は確率分布モデルとしても好しくないことを意味しているからである。ここに、ストレス5, 7, 10, 15kVで、

$$\log(L_{\max}(\text{Gumbel})) = -57.55, -67.45, -28.74, -18.10, (\text{合計} -171.84)$$

$$\log(L_{\max}(\log\text{-normal})) = -59.04, -69.73, -27.92, -17.55, (\text{合計} -174.25)$$

であり、自由パラメータ数はどのモデルでも同じである。

5.5 例3: FPD モデル選定

例3では表5(文献⁽⁶⁾のデータ)のデータを用い、AICを確率分布モデルの選定に適用する。

仮定

(i) FPD はワイブル分布, グンベル分布, 対数正規

分布

表 5 加速劣化試験データ⁽⁶⁾ [例 3]

V_i (k psi)	破壊時刻 t_{i_j} (時間)
28.84	1637, 1658, 2437, 1709, 1267, 1785
31.63	779, 265, 257, 570, 594, 170
34.68	132, 96, 76, 122, 115, 87
38.02	43, 22, 39, 42, 41, 37

(ii) β -free(-fixed), ξ -free(-fixed), ν -free(-fixed) モデルをそれぞれ仮定する (これらの記号の細かい定義は以下に述べる)。

ストレスレベル V_i でのグンベル分布の平均寿命は、

$$\mu_i = \xi_i - \gamma \cdot \delta_i \quad (34)$$

で、SLMに、逆 n 乗則を仮定すれば

$$\mu_i = (k \cdot V_i)^{-n} \quad (35)$$

と書くことができる。ここで、

$$\delta_i = (\xi_i \cdot V_i)^{-n} \quad (36)$$

なら、故障確率分布は、

$$F(t; V_i) = 1 - \exp[-\exp(z_i(t))] \quad (37)$$

$$z_i(t) = -\gamma - (\xi_i/k)^n + (\xi_i \cdot V_i)^n \cdot t \quad (38)$$

となる。未知パラメータは、 ξ_i , n , k である。

対数正規分布の場合、

$$u_i = \log(\mu_i) = -n \cdot (\log(k) + \log(V_i)) \quad (39)$$

を直接(33)式に代入すればよい。未知パラメータは ν_i , n , k である。

β -free(-fixed)モデルと同様、 ξ -free(-fixed), ν -free(-fixed)モデルにも適用可能である。

表 6 にはこれらの仮定の下で得られた結果を示す。表より、最も妥当なモデルは β -free のワイブル型のモデルであることがわかる。 V_i のところを $V_i - V_0$ に代えることにより、このモデルにもしきい値を入れることができる。

表 6 対数尤度最尤値, AIC, パラメータ推定値 [例 3]

	ワイブル分布		グンベル分布		対数正規分布	
	β -free	β -fixed	ξ -free	ξ -fixed	ν -free	ν -fixed
$-\log(L_{\max})^*$	133.57	+3.58	134.07	+4.97	134.15	+4.27
AIC*	279.13	+1.17	280.14	+3.95	280.31	+2.53
パラメータ推定値	$\beta_1=4.42$ $\beta_2=2.17$ $\beta_3=5.14$ $\beta_4=6.04$ $k=13.9$ $n=.0204$	$\beta=3.53$	$\xi_1=.0221$ $\xi_2=.0214$ $\xi_3=.0237$ $\xi_4=.0228$	$\xi=.0225$	$\nu_1=.196$ $\nu_2=.569$ $\nu_3=.245$ $\nu_4=.263$ $k=14.2$ $n=.0206$	$\nu=.348$

*-free 欄での値は実際の値で、-fixed 欄での値は-free 欄に加えるべき値を示す。

6. 考 察

6.1 信頼区間

サンプル数が大きいとき漸近正規理論によりパラメータの近似的な信頼区間を計算することができるが、この論文で示したような例ではサンプル数は大きくはなく、従って、計算された信頼区間の解釈には注意が必要である。Nelson⁽¹⁰⁾は、漸近理論によって得られた信頼区間は尤度比から計算される信頼区間 (通常、これにより、より正確な信頼区間が得られる) よりもいくぶん狭くなることを述べている。

Efron⁽⁶⁾が提案するブートストラップ法は、Shorack⁽¹⁴⁾が使っているような単純なモデルにはすぐに適用できるが、この論文で述べているような6パラメータ以上のようなモデルでは、非常に複雑になることが予想される。

Lawless⁽⁹⁾は一定のストレスを課したときの正確な信頼区間の計算法について述べているが、ここではこの方法は採用していない。

6.2 実験結果との照合

例 1 では計算されたしきい値が妥当なものであるかどうかの実験結果も得られている。部分度電開始電圧は 4.5kV 近辺のストレスで検出され、この値は計算されたしきい値と合致している。

付録

A1 対数尤度関数の 1 次, 2 次微分

$$\frac{\partial \log f}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta} + (1 - z^\beta) \left(\log z - \frac{1}{\beta} \psi \right) \quad (A-1)$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial n} = (1 - z^\beta) \beta \log \{ k(V - V_0) \} \quad (A-2)$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial k} = (1 - z^\beta) \frac{n\beta}{k} \quad (A-3)$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial V_0} = (1 - z^\beta) \frac{-n\beta}{V - V_0} \quad (A-4)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial \beta^2} = -\frac{1}{\beta^2} - z^\beta \left(\log z - \frac{1}{\beta} \psi \right)^2 + (1 - z^\beta) \frac{\psi'}{\beta^3} \quad (A-5)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial n \partial \beta} = [\log \{ k(V - V_0) \}] \{ 1 - z^\beta (1 + \beta \log z - \psi) \} \quad (A-6)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial k \partial \beta} = \frac{n}{k} \{ 1 - z^\beta (1 + \beta \log z - \psi) \} \quad (A-7)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial V_0 \partial \beta} = -\frac{n}{V - V_0} \{ 1 - z^\beta (1 + \beta \log z - \psi) \} \quad (A-8)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial n^2} = -z^\beta [\beta \log \{ k(V - V_0) \}]^2 \quad (A-9)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial k \partial n} = \frac{\beta}{k} (1 - z^\beta [1 + n\beta \log \{ k(V - V_0) \}]) \quad (A-10)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial V_0 \partial n} = -\frac{\beta}{V - V_0} (1 - z^\beta [1 + n\beta \log \{ k(V - V_0) \}]) \quad (A-11)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial k^2} = -\frac{n\beta}{k^2} \{1 - z^\beta(1 - n\beta)\} \quad (A-12)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial V_0 \partial k} = \frac{(n\beta)^2}{k(V - V_0)} z^\beta \quad (A-13)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial V_0^2} = -\frac{n\beta}{V - V_0} \{1 - z^\beta(1 - n\beta)\} \quad (A-14)$$

ψ は $\psi(1+1/\beta)$ を, ψ' は $\psi'(1+1/\beta)$ を表わす。

A2 フィッシャーの情報行列の形

β_i は各ストレスレベルで互いに独立なので,

$$d_{a,b} = -\partial^2 \log(L) / \partial \theta_a \partial \theta_b = 0, \text{ for } a, b \leq m \text{ と } a \neq b$$

となり, 従ってフィッシャーの情報行列は,

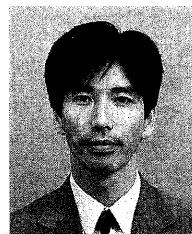
$$\begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & d_{1,m+1} & d_{1,m+2} & d_{1,m+3} \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & d_{2,m+1} & d_{2,m+2} & d_{2,m+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{m,m} & d_{m,m+1} & d_{m,m+2} & d_{m,m+3} \\ d_{m+1,1} & d_{m+1,2} & \cdots & d_{m+1,m} & d_{m+1,m+1} & d_{m+1,m+2} & d_{m+1,m+3} \\ d_{m+2,1} & d_{m+2,2} & \cdots & d_{m+2,m} & d_{m+2,m+1} & d_{m+2,m+2} & d_{m+2,m+3} \\ d_{m+3,1} & d_{m+3,2} & \cdots & d_{m+3,m} & d_{m+3,m+1} & d_{m+3,m+2} & d_{m+3,m+3} \end{pmatrix}$$

となる。

参 考 文 献

- (1) H. Akaike, "Information theory and an extension of the maximum likelihood principle", *2nd Int'l Symp. Information Theory*, 267 (1973); Akademiai Kiado, Budapest.
- (2) A. P. Basu, N. Ebrahimi, "Nonparametric accelerated life testing", *IEEE Trans. Reliability*, **31**, 432 (1982).
- (3) V. V. Bolotin, *Statistical Methods in Structural Mechanics*, (1969); Holden-Day.
- (4) T. W. Dakin, "The endurance of electrical insulation", *Proc. 4th Int'l Symp. Electrical Insulation* (in Japan), 147 (1971).
- (5) B. Efron, "Bootstrap methods: Another look at the jackknife", *Annals of Statistics*, **7**, 1 (1979).
- (6) F. Garofalo, R. W. Whitmore, W. F. Domis, F. von Gemmingen, "Creep and creep-rupture relationships in an austenitic stainless steel", *Trans. Metallurgical Society AIME*, **221**, 310 (1961).

- (7) H. Hirose, "A method to estimate the lifetime of solid electrical insulation", *IEEE Trans. Electrical Insulation*, **EI-22**, 745 (1987).
- (8) H. Hirose, "A statistical method of optimum mathematical model selection and lifetime estimation in long-term $V-t$ characteristics", *Trans. IEEE Japan*, **107-A**, 185 (1987).
- (9) J. F. Lawless, *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, (1982); John Wiley & Sons.
- (10) W. Nelson, *Accelerated Testing*, (1990); John Wiley & Sons.
- (11) Y. Sakamoto, M. Ishiguro, G. Kitagawa, *Akaike Information Criterion Statistics*, (1986); D. Reidel Publishing Co.
- (12) R. L. Schmoyer, "Linear interpolation with a nonparametric accelerated failure time model", *J. Amer. Statistical Assoc.*, **83**, 441 (1988).
- (13) R. L. Schmoyer, "Nonparametric analyses for two-level single-stress accelerated life tests", *Technometrics*, **33**, 175 (1991).
- (14) J. Schmee, G. T. Hahn, "A simple method for regression analysis with censored data", *Technometrics*, **21**, 417 (1979).
- (15) H. Schorack, "Bootstrapping robust regression", *Communications in Statistics-Theory & Methods*, **11**, 961 (1982).
- (16) L. Simoni, "A general approach to the endurance of electrical insulation under temperature and voltage", *IEEE Trans. Electrical Insulation*, **16**, 277 (1981).
- (17) T. Tanaka, A. Greenwood, *Advanced Power Cable Technology*, **I**, (1985); CRC Press.
- (18) T. Tsukui, G. Takahashi, T. Isogai, "Voltage endurance of mica insulation systems for rotating machineries", *Trans. IEE Japan*, **96-A**, 463 (1976).



広瀬 英雄
Hideo Hirose
数値計算の研究開発
に従事

本論文は, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 42, No. 4, pp. 650~657 (1993. 12) を翻訳したものです。