

長時間 $V-t$ (電圧-寿命) 特性が逆 n 乗則 $t = KV^{-n}$ に従うときの寿命推定

広瀬 英雄*

内容概要

一定電圧ストレスの下での寿命分布がワイブル分布に従い、電圧ストレス V と寿命 t との間に、 $t = KV^{-n}$ の逆 n 乗則の関係があると仮定する。また、ワイブル形状パラメータ β は、 V に無関係な一定値をとると仮定する。このとき、ワイブルパラメータ、 n 値、電圧ストレス V の下での平均寿命、 x % 破壊時間 (100個の資料中 x 個破壊する時間 τ_x)、耐用時間を指定したときの使用電圧などの推定量とそれらの誤差を求める方法について述べた。この方法では、 $V-t$ 試験に打ち切り時間を設定するときの破壊しなかった試料も寿命計算法の中に考慮することができる。誤差計算法の妥当性については、誤差の理論値とモンテカルロシミュレーションにより得られた値とを比較することにより確かめられている。推定法は、最尤推定法である。

Estimation of Lifetime When the Long Term Voltage-Lifetime ($V-t$) Characteristics Follow the Inverse Power Law, $t = KV^{-n}$.

Hideo Hirose*

Synopsis

Suppose that the probability distribution of lifetime under constant voltage stress follows the Weibull distribution and that the relation between the voltage stress, V , and the lifetime, t , is $t = KV^{-n}$. Additionally, suppose that the Weibull shape parameter β is constant; independent of V . Under these assumptions, we propose a method to calculate estimators and their errors of the Weibull parameters, the value n , mean lifetime, breakdown time under a constant voltage stress, and operation voltage for a specific lifetime. In this method, unbroken specimens are taken into account in the calculation when the cut off time is set. Validity of the method is checked by comparing the theoretical value of the errors and the result of the Monte Carlo simulation. The method is a kind of the maximum likelihood method.

1. ま え が き

電気機器、あるいは機器に使用される絶縁材料は、一般的に、使用時間とともに劣化し、ある時間で遂に絶縁破壊を生ずる。この絶縁劣化の進展の度合い、あるいは破壊に至るまでの時間は、電圧 (もしくは電界強度) 熱、機械的振動、雰囲気などのストレスの要因により変化する。これらの中で電圧劣化については、両対対数に課電電圧 V と破壊時間の平均 (あるいは中央値) t をプロットする直線になるという経験則、すなわち $t = KV^{-n}$ の逆 n 乗則がよく知られている。ここに K は定数で、 n の

値は劣化の進展度合を表わしているもので、この n 値を知ることが重要視されている。また、一定電圧のストレス下の寿命時間はワイブル分布に従うことが知られており、このワイブル分布と逆 n 乗則とを結びつける試みがなされている⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。逆 n 乗則の確率分布を組み入れることによって、寿命推定量の信頼度を議論することができる。

電圧ストレスによる劣化については、Semi-log プロット (横軸 $\log t$, 縦軸 V としたときプロットデータが直線になる) による表現法が T. W. Dakin により提案されているが⁽⁴⁾、この考え方の中には確率分布は導入されていないので、統計的に寿命推定量の信頼度を議論する

*技術本部 技術開発センター

には確率分布を組み込んだ定式化が必要である。

本論文では、寿命試験により得られたデータをもとに、絶縁材料の劣化が主として電圧に依存すると仮定したときの使用電圧下での寿命の推定量とその信頼度を求める方法、また耐用時間を設計したとき使用電圧の設計値とその信頼度を求める確率分布を仮定することが前提となっている。そこで、先の逆 n 乗則と寿命のワイブル分布を組み合わせたモデルを数学モデルとして考えることにする。この考え方は、寿命の信頼度を議論するのに都合が良いというだけでなく、多数の試験データにも合致している⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

逆 n 乗則にワイブル分布を組み合わせて、ワイブルパラメータ、寿命の平均値などの推定量やその信頼度を最小二乗法により求める方法は、W. B. Nelson⁽³⁾により論じられている。しかし、これはすべての試料が破壊するときの計算法である。試験打ち切り時間を設定したとき、破壊されずに残ってしまう寿命計算に考慮する方法も一般的な形では述べられている。⁽¹³⁾しかし、具体的にワイブル分布と逆 n 乗則とを組みつけた数学モデルにより寿命やその信頼度の計算方法を提示してはいない。この打ち切り時間を含む計算法には、最尤推定法が良く用いられる。

本論文は、一定電圧のストレス下では寿命はワイブル分布に従い、電圧ストレスと寿命とは逆 n 乗則との関係があると仮定したときの、打ち切り時間を含む寿命試験のデータから、ワイブルパラメータ、 n 値、寿命の平均値、 $x\%$ 破壊時間 (100個のうち x 個破壊する時間) の推定量とそれらの信頼度を求める方法について、また、耐用時間を指定したときの使用電圧の設計値とその信頼度について述べたものである。

2. 数学モデル

次の3つの条件を仮定する。

(1) 一定電圧 V のストレス下では、絶縁材料が使用できないと定義される寿命 (以下同義で用いる) はワイブル分布に従う。すなわ、破壊時間 (寿命と決めた特性になったとき) を t とするとき、

$$F(t; V) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right\} \quad \dots\dots\dots(1)$$

η : 尺度パラメータ

β : 形状パラメータ

(2) 寿命の平均値 Lm と電圧ストレスとは、逆 n 乗則の関係がある。すなわち、

$$Lm = KV^{-n} \quad \dots\dots\dots(2)$$

(3) β は、 V 、 t と無関係に一定である。

この3つの条件を仮定すると、(1)、(2)を組み合わせた(5)式が導ける。

$$Lm = \eta \Gamma(1 + 1/\beta) \quad \dots\dots\dots(3)$$

であるから、

$$\eta = Lm / \Gamma(1 + 1/\beta) \\ = KV^{-n} / \Gamma(1 + 1/\beta) \quad \dots\dots\dots(4)$$

したがって、(4)式を(1)式に代入して、

$$F(t; V) = 1 - \exp\left[-\{(kV)^n t\}^\beta\right] \quad \dots\dots\dots(5)$$

ただし、 $k^n = \Gamma(1 + 1/\beta) / K$ 、 $\Gamma(\quad)$ はガンマ関数である。

未知パラメータは、 β 、 n 、 k の3つである。この定式化は、W. B. Nelson⁽³⁾の考え方と同一である。一方、電圧 V と時間 t がともに確率変数として提示されている数学モデルの考え方がある⁽²⁾。

$$F(t, V) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{t_0}\right)^a \left(\frac{V}{V_0}\right)^b\right\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

t_0 : t に対する尺度パラメータ

V_0 : V に対する尺度パラメータ

a : t に対する形状パラメータ

b : V に対する形状パラメータ

このとき、 $n = b/a$ で与えられ、未知パラメータは t_0 、 V_0 、 a 、 b の4つである。この(6)式をモデルとして、これらのパラメータを推定する試みもなされているが⁽⁸⁾、(6)式は確率分布関数になり得ないので⁽⁹⁾、このような取り扱いは無意味であることに注意する必要がある。

本論文では先の(5)式を寿命分布の確率分布関数とする。

3. 最尤推定法による寿命推定法

電圧ストレスのレベルを、 V_i ($i = 1 \sim m$)、ストレス V_i 下で寿命試験を行ったときの破壊時間を t_{ij} ($j = 1 \sim m_{i,0}$) とする。ストレス V_i 下での試験打ち切り時間を T_i 、打ち切り時間までに破壊しなかった試料数を $m_{i,1}$ とする。破壊した試料数 M_0 は、 $M_0 = \sum_{i=1}^m m_{i,0}$ 、破壊しなかった試験料数 M_1 は、 $M_1 = \sum_{i=1}^m m_{i,1}$ 、総試料数 M は $M = M_0 + M_1$ である。

尤度関数を L とするとき、 L は次の(7)式で与えられる。

$$L \propto \prod_{j=1}^m \left[\left(\prod_{i=1}^{m_{i,0}} f(t_{ij}) \right) \times \left(\prod_{i=1}^{m_{i,1}} \{1 - F(T_i)\} \right) \right] \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\{(kV)^n t\}^\beta\right] \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) \\ = \left(\frac{\beta}{t}\right) \left[\{(kV)^n t\}^\beta \right] \exp\left[-\{(kV)^n t\}^\beta\right] \quad \dots\dots\dots(9)$$

推定したい未知パラメータは、 β 、 n 、 k の3つである。これらパラメータの真値を、 $\tilde{\beta}$ 、 \tilde{n} 、 \tilde{k} 、推定量を $\hat{\beta}$ 、 \hat{n} 、 \hat{k} で表わす。最尤推定法によれば、推定量 $\hat{\beta}$ 、 \hat{n} 、 \hat{k} は、 L を最大にする ($\log L$ を最大にする) β 、 n 、 k で与えられる。尤度方程式は(10)式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial \log L}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial \log L}{\partial k} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

Newton-Rophson 法を用いて(10)式を解くために、いま適当に β_0, n_0, k_0 を決め、 $\partial \log L/\partial \beta, \partial \log L/\partial n, \partial \log L/\partial k$ を β_0, n_0, k_0 の近傍で Taylor 展開し、1 次の頃まで近似すれば(10)式が成立する。

$$B(\beta, n, k) \doteq B(\beta_0, n_0, k_0) + A(\beta_0, n_0, k_0)\delta \quad \dots\dots(11)$$

ただし、

$$B(\beta', n', k') = \begin{bmatrix} \partial \log L/\partial \beta \\ \partial \log L/\partial n \\ \partial \log L/\partial k \end{bmatrix}_{\beta=\beta', n=n', k=k'} \quad \dots\dots(12)$$

$$A(\beta', n', k') = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial n \partial \beta} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial k \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial n} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial n^2} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial k \partial n} \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial k} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial n \partial k} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial k^2} \end{bmatrix}_{\substack{\beta=\beta' \\ n=n' \\ k=k'}} \quad \dots\dots(13)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_\beta \\ \delta_n \\ \delta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \beta_0 \\ n - n_0 \\ k - k_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(14)$$

ここで、 $B(\beta, n, k) = 0$ と仮定すれば、修正値 δ は、(15)式を解くことによって求められる。

$$A(\beta_0, n_0, k_0)\delta = -B(\beta_0, n_0, k_0) \quad \dots\dots(15)$$

求められた、 $\delta_\beta, \delta_n, \delta_k$ より $\beta_1 = \beta_0 + \delta_\beta, n_1 = n_0 + \delta_n, k_1 = k_0 + \delta_k$ とおき、(15)式の β_0, n_0, k_0 を β_1, n_1, k_1 で置き換え、この手続きを、 $\max(|\delta_\beta|/K_\beta, |\delta_n|/K_n, |\delta_k|/K_k) < \epsilon$ となるまで繰り返せば、 $\hat{\beta}, \hat{n}, \hat{k}$ の最尤推定量 $\hat{\beta}, \hat{k}, \hat{n}$ はそのときの、 β_1, n_1, k_1 で与えられる。ここに、 ϵ は小さい正数、 K_β, K_n, K_k は正の定数である。

以下のような計算過程で用いられる、 $A(\beta, n, k), B(\beta, n, k)$ の計算式を付録 I に示す。

試料数 M が大きいとき、推定量 $(\hat{\beta}, \hat{n}, \hat{k})$ は漸近的に平均 $(\tilde{\beta}, \tilde{n}, \tilde{k})$ 、分散共分散行列 v をもつ多変量正規分布に従うことが知られている⁽¹⁰⁾。ここに、 v は次式で与えられる。

$$v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} = -A(\hat{\beta}, \hat{n}, \hat{k})^{-1} \quad \dots\dots(16)$$

従って、 M が大きいとき推定量 $\hat{\beta}, \hat{n}, \hat{k}$ の誤差(標準偏差)は、 $\sqrt{v_{11}}, \sqrt{v_{22}}, \sqrt{v_{33}}$ で与えられる。

試験データから、 $\hat{\beta}, \hat{n}, \hat{k}$ が求められれば、電圧ストレス V の下での寿命の平均 $\bar{\mu}$ 、分散 σ^2 、 $x\%$ 破壊時間 $\bar{\tau}_x$ の推定量 $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\tau}_x$ は次の式で求めることができる。

$$\hat{\mu} = (\hat{k}V)^{-\hat{n}}\Gamma(1 + 1/\hat{\beta}) \quad \dots\dots(17)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \{(\hat{k}V)^{-\hat{n}}\}^2\{\Gamma(1 + 2/\hat{\beta}) - \Gamma^2(1 + 1/\hat{\beta})\} \quad \dots\dots(18)$$

$$\hat{\tau}_x = \exp\left[\frac{1}{\hat{\beta}} \log \log \left(\frac{1}{1-x/100}\right) - \log \{(\hat{k}V)^{\hat{n}}\}\right] \quad \dots\dots(19)$$

これら、 $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\tau}_x$ の信頼度を求めることも重大である。これらが、 $\hat{\beta}, \hat{n}, \hat{k}$ から作られた確率変数の関数であることを考えると次のようにしてそれらの誤差(標準偏差)を求めることができる⁽¹¹⁾。

今、 $\theta_1 = \beta, \theta_2 = n, \theta_3 = k$ とし、 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ が平均 $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3)$ 、分散共分散行列 $v = (v_{ij})$ をもつ確率変数とし、 g を Θ から作られた関数とする。このとき、 $g(\Theta)$ を $\hat{\Theta}$ のまわりで Taylor 展開すると、

$$g(\Theta) \doteq g(\hat{\Theta}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(\Theta) (\theta_i - \hat{\theta}_i) \quad \dots\dots(20)$$

$E(\theta_i) = \hat{\theta}_i$ なので、

$$E\{g(\Theta)\} = g(\hat{\Theta}) \quad \dots\dots(21)$$

$E(\quad)$ は期待値を表わす。この(21)式が(17)~(19)式に相当する。

更に、 $g(\Theta)$ の分散を $var\{g(\Theta)\}$ で表わすとき、

$$var\{g(\Theta)\} \doteq \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(\Theta) \right\}^2 v_{ii} + \sum_i \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(\Theta) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_j} g(\Theta) \right\} v_{ij} \quad \dots\dots(22)$$

となるので、 μ, σ, τ_x に g に適用すれば、誤差が得られる。 $\partial \mu/\partial \theta_i, \partial \sigma/\partial \theta_i, \partial \tau_x/\partial \theta_i$ の式を付録 II に示す。

次に、耐用時間 τ を指定したときの、電圧ストレスの設計値 \hat{V}_τ の推定量 \hat{V}_τ とその電圧の誤差は次のようにして求めることができる。破壊時間は $x\%$ 破壊時間とする。

$$\hat{V}_\tau = \exp\left[\frac{1}{\hat{\beta}\hat{n}} \log \left(\frac{1}{1-x/100}\right) - \log \hat{k} - \frac{1}{\hat{n}} \log \tau\right] \quad \dots\dots(23)$$

$var(\hat{V}_\tau)$ に使われる $V_\tau/\partial \theta_i$ の式を記録 II に示す。

推定量の分散を $var(\theta_i)$ 、誤差(標準偏差)を $s(\theta_i) = [var(\theta_i)]^{1/2}$ 、 $s\{g(\Theta)\} = [var\{g(\Theta)\}]^{1/2}$ と統一した記法で表現する。

4. 適用例

4.1 完全データの場合

打ち切り時間 T_i までにすべての試料が破壊する場合のデータを完全データと呼ぶ。

絶縁物の試料45個を3つのグループに等しく分け、それぞれのグループの印加電圧を $V_1=35, V_2=30, V_3=20$ としたときの破壊時間が表1のとおりであった。これをワイブル確率紙にプロットした結果が図1である。図1から、一定の電圧ストレスの下での寿命分布はワイブル分布に従い、電圧ストレスが変化してもワイブル分布の形状パラメータ β はあまり変化していないことがわかる。実際に文献(12)の方法で各電圧ストレス下での β を推定すると、 $\hat{\beta}(V_1)=1.372, \hat{\beta}(V_2)=1.667, \hat{\beta}(V_3)=1.417$

表1 V-t データ例

電圧	35	30	20	15 *1
破 壊 時 間	2.08	9.44	660.6	0.39368×10^4
	2.35	13.26	1151.2	0.97796×10^4
	3.15	18.10	1219.8	0.15782×10^5
	5.19	28.17	1291.2	0.18023×10^5
	6.91	34.66	1696.6	0.24552×10^5
	7.35	35.66	1900.0	0.29970×10^5
	9.22	37.75	2030.0	0.37376×10^5
	10.72	44.72	2875.5	(0.66087×10^5) *2
	11.34	61.58	3849.4	(0.71616×10^5)
	11.89	64.56	3960.7	(0.72562×10^5)
12.83	66.43	4964.8	(0.75170×10^5)	
16.85	67.08	4966.1	(0.78941×10^5)	
25.49	77.27	6585.9	(0.81119×10^5)	
28.81	92.41	8492.0	(0.94553×10^5)	
33.50	138.48	10061.0	(0.11683×10^6)	

*1 電圧35、30、20での破壊時間は実測値、電圧15での破壊時間はモンテカルロシミュレーションにより作成した値。

*2 電圧15での試験打ち切り時間を、 5×10^4 と仮定。()内の時間は打ち切り時間がないときの破壊時間を表わす。

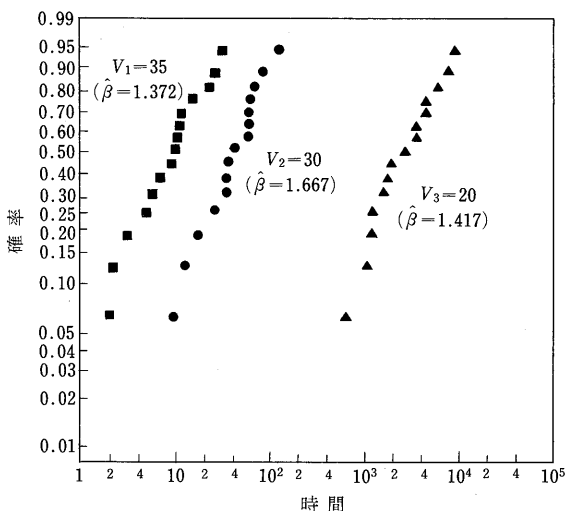


図1 寿命のワイブルプロット図例

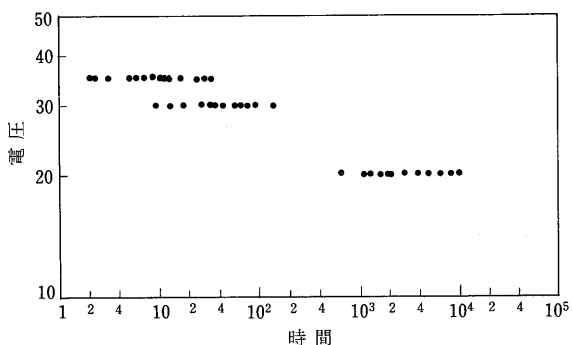


図2 V-t データ例

となる。そこで、(5)式を仮定することができ、 $\hat{\beta}$, \hat{n} , \hat{k} , $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_s$, \hat{V}_t とそれらの誤差 $s(\hat{\beta})$, $s(\hat{k})$, $s(\hat{\mu})$, $s(\hat{\sigma})$, $s(\hat{V}_t)$ を求めることができる。

図1のデータを横軸を時間、縦軸を電圧の両対数紙に

プロットしたものが図2である。各電圧ストレス V_i とストレス V_i 下での平均寿命 $\hat{\mu}$ とで作られる点 $(\log\{\hat{\mu}(V_i)\}, \log(V_i))$ の3点に近い直線を最小二乗法により推定すると、

$$\left. \begin{aligned} V &= \hat{K} \cdot t^{-1/\hat{n}} \\ \hat{K} &= 43.34 \\ \hat{n} &\doteq 10.25 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

を得る。

一方、第3章の最尤推定法を用いて、 $\hat{\beta}$, \hat{n} , \hat{k} を推定してみよう。

β , n , k の初期値をそれぞれ1.4, 10, 0.022にとれば、

$$A = \begin{bmatrix} -42.6 & 12.3 & -9016 \\ 12.3 & -29.3 & 20953 \\ -9016 & 20953 & -183.3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(25)$$

$$B = \begin{bmatrix} -1.78 \\ -1.50 \\ 185.6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(26)$$

となり、

$$\delta = \begin{bmatrix} 0.062 \\ 0.262 \\ 2.58 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(27)$$

を得る。したがって、1回目の修正値は、

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \beta_0 + \delta_\beta = 1.462 \\ n_1 &= n_0 + \delta_n = 10.26 \\ k_1 &= k_0 + \delta_k = 0.0223 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

である。この β_1 , n_1 , k_1 を新しく β_0 , n_0 , k_0 に置き換えて、この操作を $\max(|\delta_\beta|/\beta, |\delta_n|/n, |\delta k|/k) < 10^{-5}$ となるまで繰り返すと、最尤推定値は、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta} &= 1.4572 \\ \hat{n} &= 10.246 \\ \hat{k} &= 0.02223 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

となる。最尤推定値 \hat{n} , 先の最小二乗法で求めた値と同じである。繰り返しの最後の手続きの段階で、 $\hat{\beta}$, \hat{n} , \hat{k} の分散は $-A^{-1}(\hat{\beta}, \hat{n}, \hat{k})$ の対角要素で与えられるから、 $\hat{\delta}$, \hat{n} , \hat{k} の誤差 $s(\hat{\beta})$, $s(\hat{k})$ は、

$$\left. \begin{aligned} s(\hat{\beta}) &= 0.167 \\ s(\hat{n}) &= 0.422 \\ s(\hat{k}) &= 5.06 \times 10^{-4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

となる。

いま、使用電圧を10としよう。このとき、(17)~(19)式より、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu} &= 4.44 \times 10^6, \quad \hat{\sigma} = 3.10 \times 10^6, \quad \hat{\tau}_{50} = 3.81 \times 10^6 \\ \hat{\tau}_5 &= 6.38 \times 10^5, \quad \hat{\tau}_1 = 2.09 \times 10^5 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

(22)式より

$$\left. \begin{aligned} s(\hat{\mu}) &= 1.96 \times 10^6, \quad s(\hat{\sigma}) = 1.39 \times 10^6, \\ s(\hat{\tau}_5) &= 3.30 \times 10^5, \quad s(\hat{\tau}_1) = 1.24 \times 10^5, \\ & \quad s(\hat{\tau}_{50}) = 1.70 \times 10^6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

が得られる。

また、耐用時間を 2×10^6 と指定したときの使用電圧 \hat{V}_τ を求めてみよう。破壊時間は50%破壊時間とする。(23)式, (22)式から,

$$\hat{V}_\tau = 10.65, s(\hat{V}_\tau) = 0.434 \dots\dots\dots(33)$$

となる。

推定量とその誤差を用いて、推定量の信頼区間を求めることができる。例えば、 $\hat{\mu}$ の90%信頼区間は,

$$[\hat{\mu} - 1.645s(\hat{\mu}), \hat{\mu} + 1.645s(\hat{\mu})] \dots\dots\dots(34)$$

で与えられる。このようにして得られた推定値 $\hat{\tau}_{50}$, $\hat{\tau}_1$, とそれらの90%信頼区間を各電圧について求めてみたのは図3である。また、50%, 1%破壊時間について、耐用時間を指定したときの使用電圧の推定値 \hat{V}_τ とその90%信頼区間を各耐用時間について求めてみたのが図4である。図3, 4は推定値については同じものを示している。例えば図3の1%破壊時間の90%信頼区間と図4のそれとが異って表示されているのは奇異に感じられるが、図3では電圧を指定したときの破壊時間の信頼度、図4では耐用時間を指定したときの使用電圧の信頼度を表わしたもので、両図は全く同じ性格のものではない。両図は場合によって使い分ける必要がある。この信頼度の妥当性は5節で、理論値およびモンテカルロシミュレーションにより評価する。

これらの結果から次のようなことがわかる。

(i) 通常 $V-t$ 特性は、課電電圧とその平均寿命とで表わされるが、機器設計者にとっては $x\%$ 破壊時間も興味ある数値である。この破壊時間は平均寿命と大きく離れている場合があるので注意を要する。この計算例では、 $V=10$ のときの平均寿命は 4.44×10^6 , 1%破壊時間は 2.09×10^5 と、そのオーダーが一桁違う。図5に β に対する μ/τ_{50} , τ_5/τ_{50} の値を示した。

(ii) 平均寿命, $x\%$ 破壊時間の推定量とともにそれらの信頼度を求めた結果、ある課電電圧以下になると、寿命推定量は得られても、その信頼度が全くない場合があることが判る。例えば、この計算例では、電圧10以上までは90%信頼区間が得られているが、電圧8以下になると全く得られていない。この例では、試験電圧35~20の試験結果からは電圧10以上の寿命計算結果だけが信頼できるということである。

特に (ii) の性質は、 $V-t$ 直線の補外により寿命推定がある限られた範囲でのみ有効であることを表わし、注意すべき性質である。この補外可能な範囲を一般的に論ずることは、 $V-t$ 試験法上、非常に重要な問題であるが、ワイブルパラメータ、電圧設計レベル、試料数など多くのパラメータを必要とし、かなり困難な問題であるので次の検討の課題とする。

そこで次節ではこのことの一つの対策の例として電圧10以下の寿命推定値の信頼度を更に高めるために、電圧15での寿命試験を更に15個追加した場合について述べる。このとき、決められた試験時間内に破壊しない試料もで

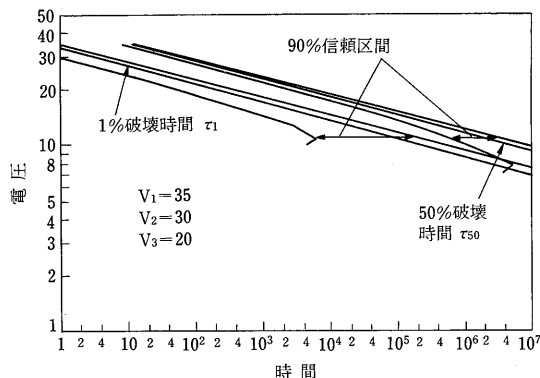


図3 使用電圧を指定したときの $\hat{\tau}_{50}$, $\hat{\tau}_1$ の90%信頼区間(1)

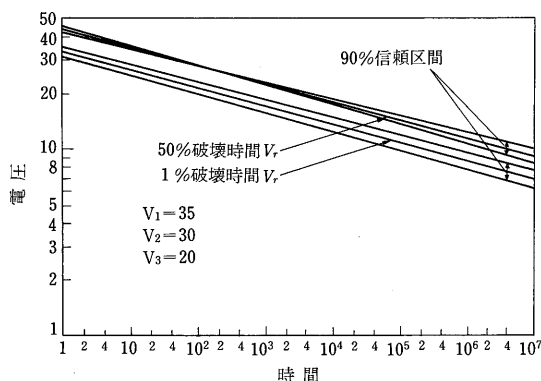


図4 耐用時間を指定した時の、使用電圧 \hat{V} の90%信頼区間(1)

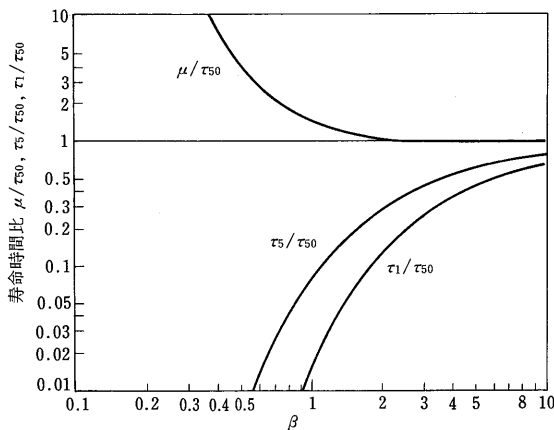


図5 β と寿命時間比 μ/τ_{50} , τ_5/τ_{50} , τ_1/τ_{50} との関係

てくる。

4.2 試験打ち切り時間のある場合

設定された試験時間内にすべての試料が破壊しなかった場合でも、破壊しなかった試料は「破壊しなかった」という情報を持っており、寿命推定に有効に使うことができる。

4.1で述べた同じ試料を電圧15で課電した試験結果が表1のとおりであったと仮定する (実際には試験しておらず、 $\hat{\beta}$, \hat{n} , \hat{k} を(29)式で与えたときのコンピュータシミュレーション結果である)。

試験打ち切り時間を 5×10^4 と仮定すると、試料15個

のうち 8 個は破壊されずに残っている。電圧 35, 30, 20, 15 で課電された 52 個の破壊時間データと 8 個の打ち切り時間のデータを用いて, 3 節の方法により 4.1 で述べた同じ方法で推定値とその誤差を求め, 図 3 に相当するものを求めた結果が図 6 である。

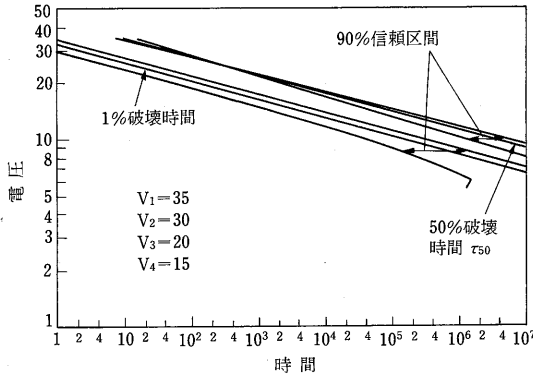


図 6 使用電圧を指定したときの τ_{50} , τ_1 の 90% 信頼区間(2)

図 6 を図 3 と比較すると, 電圧 15 での課電の試験の効果は, 課電電圧の低いレベルでの寿命推定値の信頼区間が非常に小さくなっていることとして表われている。図 3 では電圧約 10 以上での寿命の信頼度が議論できたのに対し, 図 4 では, それは電圧約 6 以上となっている。

このとき, $\hat{\beta}$, \hat{n} , \hat{k} の推定値とその誤差は,

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta} &= 1.3915, & s(\hat{\beta}) &= 0.148 & \hat{n} &= 10.134, & s(\hat{n}) &= 0.335 \\ \hat{k} &= 0.02217, & s(\hat{k}) &= 4.83 \times 10^{-4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

また, 使用電圧を 10 としたとき,

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu} &= 3.89 \times 10^6, & \hat{\sigma} &= 2.83 \times 10^6, \\ \hat{\tau}_{50} &= 3.28 \times 10^6, & \hat{\tau}_5 &= 5.05 \times 10^5, \\ \hat{\tau}_1 &= 1.56 \times 10^5, & s(\hat{\mu}) &= 1.27 \times 10^6, \\ s(\hat{\sigma}) &= 1.00 \times 10^6, & s(\hat{\tau}_{50}) &= 1.06 \times 10^6, \\ s(\hat{\tau}_5) &= 1.93 \times 10^5, \\ s(\hat{\tau}_1) &= 7.22 \times 10^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

耐用時間を, 2×10^6 と指定したときの 50% 破壊時間に対する \hat{V}_τ と $s(\hat{V}_\tau)$ は,

$$\hat{V}_\tau = 10.50, \quad s(\hat{V}_\tau) = 0.315 \quad \dots\dots\dots(37)$$

となる。これらの結果のうち, 明らかに, 使用電圧 10 のときの $s(\hat{\mu})$, $s(\hat{\sigma})$, $s(\hat{\tau}_{50})$, $s(\hat{\tau}_5)$, $s(\hat{\tau}_1)$ は, 先の電圧 35, 30, 20 での課電の完全データの場合のそれらより優れている。

図 4 に相当するものをここでの試験データに適用して求めてみても, 信頼区間は少し小さくなるだけであまり大きな変化は見られない。

5. 誤差計算法の妥当性の検証

4 項で, 使用電圧を設定したときの寿命推定値の信頼区間を表わした図 3 と, 耐用時間を設定したときの使用

電圧の推定値の信頼区間を表わした図 4 とが異なることを示した。このことは, 図 3 は電圧から時間を, 図 4 は時間から電圧を評価するもので, いずれも逆の適用はできないことを示している。この事実を確認するために, ここでは一つの試験データから得られる誤差 $S(\cdot)$ と理論誤差, 多数回のモンテカルロシミュレーションにより得られた推定値の標準偏差とを比較して $S(\cdot)$ の妥当性の検証を行う。

$\hat{\beta}=1.5$, $\hat{n}=10$, $\hat{k}=0.022$, $V_1=35$, $V_2=30$, $V_3=20$, 各電圧レベルでの試料数 100 個の完全データと仮定する。

5.1 理論誤差

$\hat{\beta}$, \hat{n} , \hat{k} の理論誤差 $\bar{s}(\hat{\beta})$, $\bar{s}(\hat{n})$, $\bar{s}(\hat{k})$ は(4)式により求めることができる⁽¹¹⁾。

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij} &= E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right) = 100 \times \int_0^\infty \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot f(t) dt \\ &= 100 \times \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty \frac{\partial^2 \log L(t; V_i)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot f(t; V_i) dt \end{aligned} \dots\dots\dots(38)$$

$$\tilde{A} = [A_{ij}] \quad \dots\dots\dots(39)$$

$$\tilde{v} = [\tilde{v}_{ij}] = -[\tilde{A}]^{-1} \quad \dots\dots\dots(40)$$

$$\bar{s}(\hat{\beta}) = \sqrt{\tilde{v}_{11}}, \quad \bar{s}(\hat{n}) = \sqrt{\tilde{v}_{22}}, \quad \bar{s}(\hat{k}) = \sqrt{\tilde{v}_{33}} \quad \dots\dots\dots(41)$$

Romberg 積分により, (38)式を数値積分すると,

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} 0.45595 \times 10^{-2} & 0.78634 \times 10^{-7} & -0.8848 \times 10^{-5} \\ 0.78634 \times 10^{-2} & 0.26594 \times 10^{-1} & 0.29212 \times 10^{-4} \\ -0.18848 \times 10^{-5} & 0.29212 \times 10^{-4} & 0.40036 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(42)$$

$$\begin{aligned} \bar{s}(\hat{\beta}) &= 0.67524, & \bar{s}(\hat{n}) &= 0.16308, \\ \bar{s}(\hat{k}) &= 2.001 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(43)$$

が得られる。

また, (42)式の値を用いることにより, 電圧ストレス 10 のときの $\bar{s}(\hat{\mu})$, $\bar{s}(\hat{\sigma})$, $\bar{s}(\hat{\tau}_{50})$, $\bar{s}(\hat{\tau}_5)$, $\bar{s}(\hat{\tau}_1)$ などが計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu} &= 0.3399 \times 10^7, & \bar{s}(\bar{\mu}) &= 0.57805 \times 10^6, \\ \bar{\sigma} &= 0.23077 \times 10^7, & \bar{s}(\bar{\sigma}) &= 0.40001 \times 10^6, \\ \bar{\tau}_{50} &= 0.29489 \times 10^7, & \bar{s}(\bar{\tau}_{50}) &= 0.50590 \times 10^6, \\ \bar{\tau}_5 &= 0.51977 \times 10^6, & \bar{s}(\bar{\tau}_5) &= 0.10296 \times 10^6, \\ \bar{\tau}_1 &= 0.17534 \times 10^6, & \bar{s}(\bar{\tau}_1) &= 0.39829 \times 10^5, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

耐用年数を 2×10^6 と仮定したときの 50% 破壊時間時の設定電圧 \hat{V}_τ とその誤差 $\bar{s}(\hat{V}_\tau)$ は,

$$\hat{V}_\tau = 10.396, \quad \bar{s}(\hat{V}_\tau) = 0.17113 \quad \dots\dots\dots(45)$$

となる。

5.2 モンテカルロシミュレーション

1 つの $V-t$ 試験に相当するものを 1000 回モンテカルロシミュレーションを行い, $\hat{\beta}$, \hat{n} , \hat{k} , 電圧ストレスを 10

と仮定したときの $\hat{\tau}_{50}$, $\hat{\tau}_5$, $\hat{\tau}_1$, 耐用時間を 2×10^6 と仮定したときの破壊確率 50%, 5%, 1% に対する, 設定電圧 V_τ とそれらの誤差を求めた結果が表 2 のとおりであった。各試行回毎に推定値をその誤差を求め, それらの平均と標準偏差を計算したものを表に下に付けた。推定値の誤差の平均は, 推定値の標準偏差と合致していることがわかる。

また, これらの結果は先の理論値と良い一致を示していることがわかる。

これらの結果により, 3 項での推定量の誤差の計算式は妥当であることが検証できた。

6. む す び

一定電圧ストレス下での寿命分布がワイブル分布に従い, 電圧ストレス V と寿命 t との関係が, $t=KV^{-n}$ の逆 n 乗則に従うときの, ワイブルパラメータ, n 値, 電圧ストレス V の下での平均寿命, $x\%$ 破壊時間 τ_x , 耐用時間 τ を指定したときの使用電圧 V_τ とそれらの誤差を求める方法を示した。寿命試験データは, 試験打ち切り時間がある場合に破壊しなかったデータも使うことができる。

付録 I $A(\beta, n, k)$ $B(\beta, n, k)$ の計算式

$G(T)=1-F(T)$ として,

$$\log L = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^{m_{i,0}} \log f(t_{ij}) + \sum_{j=1}^{m_{i,1}} \log \{G(T_{ij})\} \right]$$

..... (付 1)

であるから, $\partial \log f(t_{ij}) / \partial \theta_s$, $\partial \log G(T_{ij}) / \partial \theta_s$, $\partial^2 \log f(t_{ij}) / \partial \theta_s \partial \theta_t$, $\partial^2 \log G(T_{ij}) / \partial \theta_s \partial \theta_i$ の計算式を示す。 $\theta_1 = \beta$, $\theta_2 = n$, $\theta_3 = k$ である。

$$\partial \log f / \partial \beta = 1 + Z_2 Z_4 \dots\dots\dots (付 2)$$

$$\partial \log f / \partial n = \beta Z_1 Z_4 \dots\dots\dots (付 3)$$

$$\partial \log f / \partial k = (n\beta/k) Z_4 \dots\dots\dots (付 4)$$

$$\partial \log f / \partial \beta^2 = -1/\beta^2 - Z_2^2 Z_3 \dots\dots\dots (付 5)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log f / \partial n \partial \beta &= Z_1 \{1 - Z_3(1 + \beta Z_2)\} \\ &= \partial^2 \log f / \partial \beta \partial n \dots\dots\dots (付 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log f / k \partial \beta &= (n/k) \{1 - Z_3(1 + \beta Z_2)\} \\ &= \partial^2 \log f / \partial \beta \partial k \dots\dots\dots (付 7) \end{aligned}$$

$$\partial^2 \log f / \partial n^2 = -\beta^2 Z_1^2 Z_3 \dots\dots\dots (付 8)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log f / \partial k \partial n &= (\beta/k) \{2Z_3(1 + \beta n Z_1)\} \\ &= \partial^2 \log f / \partial n \partial k \dots\dots\dots (付 9) \end{aligned}$$

$$\partial^2 \log f / \partial k^2 = -(\beta n/k^2) \{1 - Z_3(1 - \beta n)\} \dots\dots\dots (付 10)$$

$$\partial \log G / \partial \beta = -Z_2 Z_3 \dots\dots\dots (付 11)$$

$$\partial \log G / \partial n = -\beta Z'_1 Z'_3 \dots\dots\dots (付 12)$$

$$\partial \log V / \partial k = -(\beta n/k) Z'_3 \dots\dots\dots (付 13)$$

$$\partial^2 \log G / \partial \beta^2 = -Z'_2 Z'_3 \dots\dots\dots (付 14)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log G / \partial n \partial \beta &= -Z'_1(1 + \beta Z'_2) Z'_3 \\ &= \partial^2 \log G / \partial \beta \partial n \dots\dots\dots (付 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log G / \partial k \partial \beta &= (n/k)(1 + \beta Z'_2) Z'_3 \\ &= \partial^2 \log G / \partial \beta \partial k \dots\dots\dots (付 16) \end{aligned}$$

$$\partial^2 \log G / \partial n^2 = -(\beta Z'_1)^2 Z'_3 \dots\dots\dots (付 17)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 \log G / \partial k \partial n &= -(\beta/k)(1 + \beta n Z'_1) Z'_3 \\ &= \partial^2 \log F / \partial n \partial k \dots\dots\dots (付 18) \end{aligned}$$

$$\partial^2 \log G / \partial k^2 = +(\beta n/k^2)(1 - \beta n) Z'_3 \dots\dots\dots (付 19)$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \log(kV_i) \\ Z'_1 &= Z_1 \end{aligned} \dots\dots\dots (付 20)$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \log(kV_i)^n t_{ij} \\ Z_2 &= \log\{(kV_i)^n T_{ij}\} \end{aligned} \dots\dots\dots (付 21)$$

$$\begin{aligned} Z_3 &= \{(kV_i)^n t_{ij}\}^\beta \\ Z_3 &= \{(kV_i)^n T_{ij}\}^\beta \end{aligned} \dots\dots\dots (付 22)$$

$$\begin{aligned} Z_4 &= 1 + Z_3 \\ Z'_4 &= 1 - Z'_3 \end{aligned} \dots\dots\dots (付 23)$$

付録 II $\partial \mu / \partial \theta_i$, $\partial \sigma / \partial \theta_i$, $\partial \tau_x / \partial \theta_i$ の計算式

$$\partial \mu / \partial \beta = (kV)^{-n} \cdot \partial \Gamma(1 + 1/\beta) / \partial \beta \dots\dots\dots (付 24)$$

$$\partial \mu / \partial n = \mu \cdot \log\{(kV)^{-1}\} \dots\dots\dots (付 25)$$

$$\partial \mu / \partial k = -(n/k) \cdot \mu \dots\dots\dots (付 26)$$

表 2 モンテカルロシミュレーション結果

試 行	$\hat{\beta}$ $s(\hat{\beta})$	\hat{n} $s(\hat{n})$	\hat{k} $s(\hat{k})$	$\hat{\tau}_{50}$ $s(\hat{\tau}_{50})$	$\hat{\tau}_1$ $s(\tau_1)$	$\hat{\tau}_1$ $s(\tau_1)$	\hat{V}_τ (50%) $s(V_\tau)$	\hat{V}_τ (5%) $s(V_\tau)$	\hat{V}_τ (1%) $s(V_\tau)$
1	1.4308 0.64930×10^{-1}	9.9748 0.17276	0.022191 0.21149×10^{-3}	0.25732×10^7 0.46600×10^6	0.41702×10^4 0.86579×10^5	0.13348×10^6 0.31726×10^5	10.256 0.18086	8.5456 0.19232	7.6233 0.20279
2	1.4711 0.66520×10^{-1}	10.053 0.16974	0.022153 0.20616×10^{-3}	0.29651×10^7 0.52672×10^6	0.50508×10^6 0.10231×10^6	0.16678×10^6 0.38573×10^5	10.400 0.17609	8.7206 0.18736	7.8105 0.19809
平均	1.5058 0.67884×10^{-1}	9.9926 0.16295	0.021997 0.20010×10^{-3}	0.29614×10^7 0.50726×10^6	0.52607×10^6 0.10369×10^6	0.17892×10^6 0.40349×10^5	10.384 0.17114	8.7314 0.18481	7.8337 0.19639
標準偏差	0.69386×10^{-1}	0.16316	0.20056×10^{-3}	0.51023×10^6	0.10478×10^6	0.41147×10^5	0.17157	0.18859	0.20122
理論値	1.5 0.6752×10^{-1}	10 0.1630	0.022 2.001×10^{-4}	0.2949×10^7 0.5059×10^6	0.5198×10^6 0.1030×10^6	0.1753×10^6 0.3983×10^5	10.40 0.1711	8.739 0.1818	7.839 0.1965

上段: 推定値, 下段: 推定値の誤差 $s(\)$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \beta} = \frac{\left\{ \eta \frac{\partial}{\partial \beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) - 2\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial}{\partial \beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right\}}{\partial \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 \right\}^{1/2}} \quad \text{.....(付27)}$$

$$\partial \sigma / \partial s = \partial \cdot \log\{(kV)^{-1}\} \quad \text{.....(付28)}$$

$$\partial \sigma / \partial k = (-n/k)\sigma \quad \text{.....(付29)}$$

$$\partial \tau / \partial \beta = \tau_x \cdot (-1/\beta^2) \cdot \log \log\{1 - x/100\} \quad \text{.....(付30)}$$

$$\partial \tau_x / \partial n = \tau_x \cdot \log\{(kV)^{-1}\} \quad \text{.....(付31)}$$

$$\partial \tau_x / \partial k = \tau_x \cdot (-n/k) \quad \text{.....(付32)}$$

ガンマ関数 Γ(y) の数値微分は、y の近傍の 5 点から Γ(y) を 4 次多項式で近傍し、その微分係数を用いている。

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = \hat{V}_\tau \cdot \frac{1}{n} \log \log\left(\frac{1}{1-x/100}\right) \cdot \left(\frac{-1}{\beta^2}\right) \quad \text{.....(付33)}$$

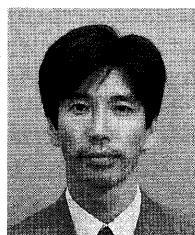
$$\frac{\partial V_\tau}{\partial n} = \hat{V}_\tau \cdot \frac{1}{n^2} \left\{ \log \tau - \frac{1}{\beta} \log \log\left(\frac{1}{1-x/100}\right) \right\} \quad \text{.....(付34)}$$

$$\partial V_\tau / \partial k = \hat{V}_\tau \cdot (-1/k) \quad \text{.....(付35)}$$

文 献

- (1) A. Devaux et al, 「Reliability and development towards High Voltages of Synthetic Insulated-Cables Part I」, *CIGRE*, 21-10 (1968)
- (2) E. Occhini, 「A Statistical Approach to the Discussion of the Dielectric Strength in Electric Cables」, *IEEE, Trans PAS*, vol. PAS-90, 2671 (1971)
- (3) W. B. Nelson, 「Statistical Methods for Accelerated Life Test Data, The Invesde Pauer Law Model」, *G. E. TIS Report*, 71-C-011 (1970)
- (4) T. W. Dakin, 「Theory of Voltage Engurance」, *CIGRE*, 15-06, (1983)

- (5) 夏目, 松下, 松浦, 「固体絶縁の電圧劣化と V-t 特性」, 電気学会絶縁材料研究会資料, *EIEIM-76-42*, p. 1, (1976)
- (6) 青柳, 本多, 小林, 「各種絶縁材料の V-t(破壊電圧-時間)特性, エポキシ絶縁物」, 昭和56年電気四学会連合大会, 13-4, p. 2-110, (昭56)
- (7) T. S. Ramu, 「On the Estimation of Life of Power Apparatus Insulation Under Cambined Electrical and Thermal Stress」, *IEEE, Electrical Insulation*, vol. E1-20, No. 1, p. 70, (1985)
- (8) 松葉, 田辺, 「CV ケーブルの V-t 特性とその信頼性の考察」, 電気学会絶縁材料研究会資料, *EIM-83-86*, p. 27 (1983)
- (9) 広瀬, 「長時間 V-t(電圧-寿命)特性に用いられる数学モデルについての一考察」, 電気学会論文誌 A, vol 106, No. 4, p. 185, (昭61)
- (10) S. M. Kendall & A. Stuart, 「The advanced Theory of Statistics」, vol. 2, p.59, (1971), *Griffin*
- (11) S. M. Kendall & A. Stuart, 「The advanced Theory of Statistics」 vol. 1, p. 246, (1971), *Griffin*
- (12) 広瀬, 「交流絶縁破壊電圧がワイブルパラメータを持つときの破壊電圧推定法」, 昭和59年電気関係学会東海支部大会, No. 192, (昭59)
- (13) Wayne Nelson, 「Applied Life data Analysis」, p. 313, (1982), *Wiley*



広瀬 英雄
Hideo Hirose
数値計算の
研究開発に従事