

上昇法によるインパルス絶縁破壊電圧の推定

Estimation of Impulse Dielectric Breakdown Voltage by Step-up Method.

内容梗概

空気などのような自己復帰可能なインパルスフラッシュオーバ電圧を求める試験法には昇降法が用いられ、一度絶縁破壊してしまると二度と供試物として利用できない絶縁体のインパルス絶縁破壊電圧 Y を求める試験には上昇法(交流の上昇法にならって同名使用)が用いられる。

昇降法では、分布関数を正規分布と仮定し、その平均と標準偏差の推定値と推定誤差を求める方法が提示されるのに対し、上昇法ではこの指針がない。

本論文は、 Y が正規分布に従っていると仮定したときに、(1)その平均 \bar{y} と標準偏差 $\bar{\sigma}$ の推定値と推定誤差を最尤推定法を用いて求める方法を示し、(2)供試物の必要最小個数 N_{\min} 、印加電圧上昇幅 d と同一印加レベルでの試験回数 m の最適設定値について検討した結果について求めている。効率的な試験で信頼できる推定値を得るには、 N_{\min} は20、 \bar{d} は標準偏差 $\bar{\sigma}$ の0.6~1.2係程度、 m は1に設定するのが望ましい⁽⁶⁾。

広瀬 英雄* Hideo Hirose

1. まえがき

一般に絶縁物の絶縁破壊は確率的現象であるから、絶縁破壊電圧 X (X : 確率変数)がある分布関数 F に従うと仮定するとき、その分布関数のパラメータを求めれば、絶縁特性はその分布関数 F の形とパラメータによって表わすことができる。

空気などのような自己復帰可能な絶縁体のインパルスフラッシュオーバ電圧 X を求める試験には、 X の分布関数 F を正規分布と仮定して、“1回の電圧印加ごとに前回の印加の結果により印加電圧を一定の幅で上下させ、それらの全体の結果からフラッシュオーバ電圧のパラメータ(平均と分散)を求める”昇降法⁽¹⁾がよく用いられる。この平均を特に50%フラッシュオーバ電圧と呼んでいる。また、一度絶縁破壊してしまると二度と供試物として利用できない絶縁体のインパルス絶縁破壊電圧 Y を求める試験には、“印加電圧の波高値を次第に上昇し、供試物が絶縁破壊を生ずる最低電圧を求める”試験法⁽²⁾がよく用いられる。以下、この試験法を交流の絶縁破壊電圧を求める試験法“上昇法”にならって、同じく上昇法と呼ぶ。昇降法については、試験回数や昇降幅の適切な設定法について統計的な裏付けがなされている⁽³⁾。一方、上昇法については文献⁽²⁾に、『供試物によっては電圧の上

昇間隔、印加回数、電圧印加の時間間隔などが破壊電圧に影響するので、試験結果にはこれらの条件もできるだけ詳細に付記しなければならない』と説明されているだけで、求められた“最低電圧”が統計的にどのような意味を持つかが明確にされていない。また、 Y の分布 G のパラメータをどのようにして求めるか、どのように試験を行えば精度良い G のパラメータの推定値が得られるか(つまり、どうすれば効率良い試験ができるか)の指針もない。

上昇法によるインパルス絶縁破壊電圧 Y を正確に知るために、

- (1) 設定された供試物の個数 N 、印加電圧上昇幅 d 、同一印加電圧レベル(以下、同一ステージ)での繰り返し試験回数 m のもとで試験を行う場合、得られたデータから統計的に分布 G のパラメータの推定値を求め、その推定値の信頼度を明らかにする。
- (2) N, d, m をどのように設定すれば、最も効率の良い試験ができるかを明らかにする。

ことは重要なことである。本論文は、 N 個の供試物のインパルス絶縁破壊電圧 Y が、独立に同一の正規分布に従うと仮定したときの上述2点について得られた結果について述べたものである。すなわち、昇降法で得られる50%フラッシュオーバ電圧に相当する性格のものを上昇法に

* 研究所

ついても与え、更にその推定値の信頼度を明らかにしようというのが本論文の趣意である。

分布Gのパラメータの推定法には最尤推定法を用いた。上昇法で得られたデータから推定値、推定誤差を簡単な代数式を用いて計算するのは困難と思われるので⁽⁴⁾、それらの値は Newton-Raphson 法を利用して数値解析的に求めた。

2. 上昇法により得られる絶縁破壊電圧 E

供試物が絶縁破壊を生じる電圧を上昇法で求める場合、その電圧Eは電圧上昇幅dが小さいほど低くなる。このことを例示するために、絶縁破壊電圧Yが分布関数Gに従っていると仮定し、上昇法の試験をコンピュータで模擬して、絶縁破壊“最低”電圧Eの頻度分布を求めた。

いま、試験は電圧の低いほうからステージ0, 1, 2, ..., i, ...で行われているものとし、そのときの印加電圧Eを $E = E_0, E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ とする。電圧上昇幅をdとすると $E_i = E_0 + id$ である。このとき、ステージiで絶縁破壊する確率(頻度) v_i は、ステージiまで一度も絶縁破壊しない確率を u_i とすれば、次式で与えられる。

$$v_i = u_{i-1} - u_i \dots\dots\dots(1)$$

$$u_i = \prod_{j=0}^i (1 - G(y_j))^m \dots\dots\dots(2)$$

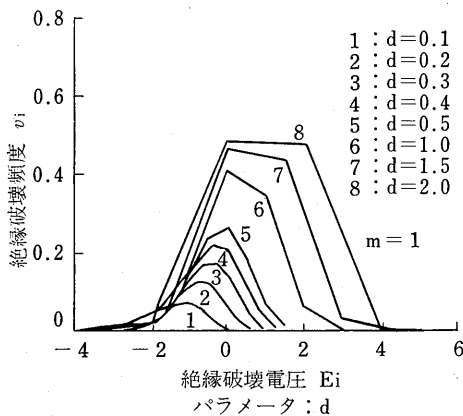


図1 絶縁破壊電圧 E_i での破壊頻度 v_i

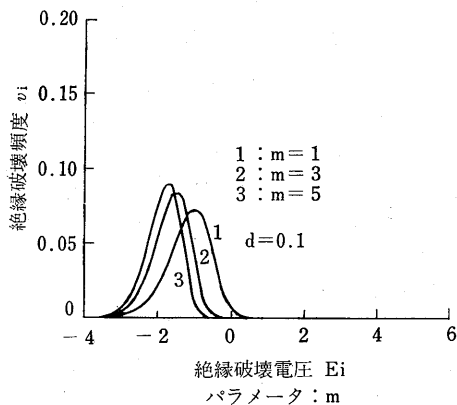


図2 絶縁破壊電圧 E_i での破壊頻度 v_i

図1は、 $m=1$ で分布Gが平均0、分散1の標準正規分布と仮定するとき、電圧上昇幅dをパラメータにしたときの絶縁破壊電圧 E_i に対する絶縁破壊頻度 v_i を表わしたものである。パラメータdによる頻度分布の違いを明らかにするために、頻度分布は折線グラフで表わした。図1によると、dが小さくなるほど上昇法で得られた絶縁破壊電圧Eの平均は低くなっていることが示される。例えば、図1で $d=1.0, 0.1$ のときの上昇法で得られた絶縁破壊電圧Eの平均は、それぞれ約0、-1である。また図2は、上と同様に分布Gに標準正規分布を仮定し、 $d=0.1$ としたときに、mをパラメータとしたときの絶縁破壊電圧 E_i に対する絶縁破壊頻度 v_i を表わしたものである。図2によると、mを大きくすることはd小さくすることと同様の効果を生み出すことがわかる。すなわち、mが大きくなるほど上昇法で得られた絶縁破壊電圧Eの平均は低くなっている。

従って、上昇法により得られた絶縁破壊電圧Eそのものを求めても、試験条件により異なった値を示すので、その値は一つの目安にはなっても普遍的データとしてあまり意味のないものではないと思われる。そこで、試験法のパラメータ(d, m)の変化により影響を受けない分布Gのパラメータ(例えば、平均、分散)を推定し、それを絶縁破壊電圧Yの指標にすることを提案する。

3. 最尤推定法による絶縁破壊電圧 Y の推定

3.1 定義と仮定

インパルス絶縁破壊電圧Yは、平均 \bar{b} 、分散 a^2 の正規分布に従うと仮定する。供試物の個数をN、印加電圧上昇幅をd、同一ステージでの繰返し試験回数をmとする。

試験は電圧の低いほうからステージ0, 1, 2, ..., i, ...で行われるものとし、そのときの印加電圧Yを $y = y_0, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$ とする。 $y_i = y_0 + id$ である。

3.2 試験法とデータ記録

ほとんど絶縁破壊しないステージ(ステージ0)から試験を行い、各供試物について、それぞれ絶縁破壊したステージ $i_s (s=1, 2, \dots, N)$ と、そのステージでの破壊に至るまでの試験回数 $m_s (s=1, 2, \dots, N)$ とを記録する。試験終了後、ステージiで絶縁破壊した供試物の個数 k_i 、ステージiでの全供試物に対しての試験回数 M_i を求める。このとき k_i, M_i は次式で表わされる。

$$k_i = \sum_{s=1}^N \varphi(i, i_s) \dots\dots\dots(3)$$

$$M_i = \sum_{s=1}^N \{m_s \varphi(i, i_s) + m \varphi(i, i_s)\} \dots\dots\dots(4)$$

ここに、

$$\varphi(i, j) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \dots\dots\dots(5)$$

$$\varphi(i, j) = \begin{cases} 1 & (i < j) \\ 0 & (i \geq j) \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

である。

3.3 推定値の求め方

上昇法による試験結果から、各供試物についてデータ $(i_1, m_1), (i_2, m_2), \dots, (i_N, m_N)$ が得られている。 p_i, q_i を(7)式のようにおく。

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \int_{-\infty}^{y_i} \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2a^2}\right) dy = 1 - q_i \dots\dots\dots (7)$$

このとき、上の試験結果が実現された確率 $P_{1\dots N}$ は

$$P_{1\dots N} = P_{(i_1, m_1)} P_{(i_2, m_2)} \dots P_{(i_N, m_N)} \dots\dots\dots (8)$$

$$P_{(i_s, m_s)} = q_0^{m_s} q_1^{m_s} q_2^{m_s} \dots q_{i_s}^{m_s-1} p_{i_s} \quad (s=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (9)$$

与えられる。 N 個の供試物は独立に同一の正規分布に従うのであるから、上記のような試験結果は $N!$ 個の場合が考えられる。従って、尤度関数 L を次のようにおくことができる。

$$L = N! P_{1\dots N} = N! \prod_{i \geq 0} q_i^{k_i} p_i^{l_i} \dots\dots\dots (10)$$

ただし、

$$l_i = M_i - k_i \dots\dots\dots (11)$$

最尤推定法によれば、真値 a, b の推定値 \hat{a}, \hat{b} は L を最大にする a, b で与えられる。ここでは、 L の最大値をとる a, b を見つける代わりに $\log L$ の極大値を見つけることを考え、尤度方程式を次のようにおく。

$$\begin{cases} \partial \log L / \partial a = 0 \\ \partial \log L / \partial b = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

というのは、尤度方程式を解く途中に使用するマトリックス $A(\hat{a}, \hat{b})$ が推定誤差を計算するうえで重要な役割を果たすからである。ここに、 $A(\alpha, \beta)$ は次式で与えられる。

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \log L}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial b^2} \end{pmatrix}_{a=\alpha, b=\beta} \dots\dots\dots (13)$$

Newton-Raphson 法を使って尤度方程式を解くために、いま適当に a_0, b_0 を決め、 $\partial \log L / \partial a, \partial \log L / \partial b$ を a_0, b_0 の近傍で Taylor 展開し、1次の項まで近似すれば(14)式が成立する。

$$B(a, b) \doteq B(a_0, b_0) + A(a_0, b_0) \delta \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $B(\alpha, \beta), \delta$ は

$$B(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \partial \log L / \partial a \\ \partial \log L / \partial b \end{bmatrix}_{a=\alpha, b=\beta} \dots\dots\dots (15)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - a_0 \\ b - b_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

である。ここで、 $B(a, b) = 0$ と仮定すれば、修正値 δ は(17)式を解くことによって求められる。

$$A(a_0, b_0) \delta = -B(a_0, b_0) \dots\dots\dots (17)$$

求められた δ_a, δ_b より $a_1 = a_0 + \delta_a, b_1 = b_0 + \delta_b$ とおき、(17)式の a_0, b_0 を a_1, b_1 で置き換え、この手続きを $\max(|\delta_a|, |\delta_b|) < \varepsilon$ となるまで繰返せば、 \hat{a}, \hat{b} の最尤推定値 \hat{a}, \hat{b} はそのときの a_1, b_1 で与えられる。ここに、 ε は小さな正数である。

以上のような計算過程で用いられる $A(a, b), B(a, b)$ の計算は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = \sum_{i \geq 0} \left\{ \left(-\frac{k_i}{p_i} + \frac{l_i}{q_i} \right) \frac{x_i z_i}{a} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial b} = \sum_{i \geq 0} \left\{ \left(-\frac{k_i}{p_i} + \frac{l_i}{q_i} \right) \frac{z_i}{a} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log L}{\partial a^2} &= \sum_{i \geq 0} \left\{ \left(-\frac{k_i}{p_i^2} - \frac{l_i}{q_i^2} \right) \frac{x_i^2 z_i^2}{a^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{k_i}{p_i} + \frac{l_i}{q_i} \right) \frac{z_i}{a^2} (x_i^3 - 2x_i) \right\} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial b} &= \sum_{i \geq 0} \left\{ \left(-\frac{k_i}{p_i^2} - \frac{l_i}{q_i^2} \right) \frac{x_i z_i^2}{a^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{k_i}{p_i} + \frac{l_i}{q_i} \right) \frac{z_i}{a^2} (x_i^2 - 1) \right\} \\ &= \frac{\partial^2 \log L}{\partial b \partial a} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log L}{\partial b^2} &= \sum_{i \geq 0} \left\{ \left(-\frac{k_i}{p_i^2} - \frac{l_i}{q_i^2} \right) \frac{z_i^2}{a^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{k_i}{p_i} + \frac{l_i}{q_i} \right) \frac{z_i}{a^2} x_i \right\} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ただし、

$$x_i = (y_i - b) / a \dots\dots\dots (23)$$

$$z_i = (1 / \sqrt{2\pi}) \exp(-x_i^2 / 2) \dots\dots\dots (24)$$

3.4 推定誤差の求め方

供試物の個数 N が大きいとき、推定値 (\hat{a}, \hat{b}) は漸近的に平均 (\hat{a}, \hat{b}) 、分散行列 V をもつ多変量正規分布に従うことが知られている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。ここに、 V は次式で与えられる。

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} = -A(\hat{a}, \hat{b})^{-1} \dots\dots\dots (25)$$

従って、 N が大きいとき推定値 \hat{a}, \hat{b} の誤差(標準偏差)は、 $\sqrt{V_{11}}, \sqrt{V_{22}}$ で与えられる。また、 \hat{e}_a, \hat{e}_b を次の式で定義する。

$$\begin{aligned} \hat{e}_a &= (NV_{11})^{1/2} / \hat{a} \\ \hat{e}_b &= (NV_{22})^{1/2} / \hat{a} \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

このとき、 \hat{e}_a, \hat{e}_b は十分大きな N に対して不変な推定誤差を与えるので、以後取扱いやすい。 \hat{e}_a, \hat{e}_b のこの不変値を改めて e_a, e_b とする。すなわち $\hat{e}_a \rightarrow e_a, \hat{e}_b \rightarrow e_b$

($N \rightarrow \infty$)である。本論文では \hat{e}_a, \hat{e}_b を単位推定誤差 (あるいは単に単位誤差), e_a, e_b を単位漸近推定誤差 (あるいは単に単位漸近誤差) と呼ぶ。

3.5 B-level

“B-level” を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \zeta(n) &= 1 & (n \neq 0) \\ \zeta(n) &= 0 & (n = 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

とすると

$$\text{B-level} = \sum_{i \geq 0} \zeta(k_i) \zeta(l_i) \dots\dots\dots(28)$$

このとき、上昇法により得られたデータが $\text{B-level} \leq 1$ ならば、(12)式の尤度方程式は解けない。従って、試験結果がこのような場合、供試物を増やして $\text{B-level} \geq 2$ となるまで試験を続行する必要がある。

以下に、上の命題の証明を与える。

$\text{B-level} = 1$ のとき、ある j が存在して次式が成立すると考えてよい (K は定数)。

$$\log L = K + \sum_{i < j} l_i \log q_i + \sum_{i > j} k_i \log p_i + (l_j \log q_j + k_j \log p_j) \dots\dots\dots(29)$$

(29)式の () 内の項が最大値をとるのは

$$p_j = k_j / (l_j + k_j) \dots\dots\dots(30)$$

のときで、最大値 C は

$$C = l_j \log \left(\frac{l_j}{l_j + k_j} \right) + k_j \log \left(\frac{k_j}{l_j + k_j} \right) \dots\dots\dots(31)$$

である。任意の a に対して、(30)式を満たすように b を定めることができるから、この関数を持つ a, b を改めて a', b' とおき、そのときの p_i, q_i を $p_i(a', b'), q_i(a', b')$ とする。 $a' \rightarrow 0$ で

$$\left. \begin{aligned} q_i(a', b') &\rightarrow 1 & (i < j) \\ p_i(a', b') &\rightarrow 1 & (i > j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

であるから(31)式の右辺の上限は $K + C$ となり、 L は最大値を持たない。 $\text{B-level} = 0$ のときも同様である。

4. 適用例

絶縁破壊電圧 Y が平均 $\bar{b} = 10$, 分散 $a^2 = 1$ の正規分布 G に従うと仮定したとき、上昇法をコンピュータで模擬して得られた試験結果が表1のとおりであったとする。ただし、 $N = 12, m = 1, d = 0.6, y_0 = 5.2$ とする。

いま、 a, b の初期値 a_0, b_0 を $a_0 = 1, b_0 = 10$ にとれば、

$$A(a_0, b_0) = \begin{bmatrix} -20.43 & 7.93 \\ 7.93 & -21.62 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(33)$$

$$B(a_0, b_0) = \begin{bmatrix} 1.10 \\ -3.85 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(34)$$

となり、

$$\delta = \begin{bmatrix} 1.76 \times 10^{-2} \\ 1.84 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(35)$$

表1 サンプルデータ例

ステージ i	印加電圧 y_i	総試験回数 M_i	絶縁破壊した回数 k_i
0	5.2	12	0
1	5.8	12	0
2	6.4	12	0
3	7.0	12	0
4	7.6	12	0
5	8.2	12	0
6	8.8	12	2
7	9.4	10	3
8	10.0	7	1
9	10.6	6	4
10	11.2	2	2
11	11.8	0	0

$N = 12, m = 1, d = 0.6, y_0 = 5.2$

を得る。従って、1回目の修正値は

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_0 + \delta_a = 1 + 1.75 \times 10^{-2} = 1.0176 \\ b_1 &= b_0 + \delta_b = 10 + 1.84 \times 10^{-1} = 10.184 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

である。この a_1, b_1 を新しく a_0, b_0 に置き換えて、この操作を $\max(|\delta_a|, |\delta_b|) < 10^{-5}$ となるまで繰返すと、最尤推定値は

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= 1.0583 \\ \hat{b} &= 10.2227 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

となる。繰返しの最後の手続きの段階で、 \hat{a}, \hat{b} の分散は $-A(\hat{a}, \hat{b})^{-1}$ の対角要素で与えられるから

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} \text{ の分散} &= 7.967 \times 10^{-2} \\ \hat{b} \text{ の分散} &= 8.999 \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

を得る。従って、 \hat{a}, \hat{b} の90%信頼区間は、

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} \text{ の90\%信頼区間} &= [0.594, 1.523] \\ \hat{b} \text{ の90\%信頼区間} &= [9.729, 10.716] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

である。ただし、ここで求められた推定値、信頼区間は、 N が十分大きいと仮定したときの理論から得られた値であり、 $N = 12$ のときに得られた上記の値がどの程度信頼できるかは別に検討する必要がある。このことを調べるために、モンテカルロシミュレーションを行ったので、この結果を第6章で述べる。

5. (d, m) の設定について

上昇法により得られた試験結果を使って、絶縁破壊電圧 Y の分布 G のパラメータ推定法と、その推定値の誤差

表2 ステージ*i*での事象

事 象	確 率	×の回数	○の回数
×	$u_{i-1}p_i$	1	0
○ ×	$u_{i-1}q_i p_i$	1	1
○ ○ ×	$u_{i-1}q_i^2 p_i$	1	2
⋮			
○ ○ ⋯ ×	$u_{i-1}q_i^{m-1} p_i$	1	$m-1$
○ ○ ⋯ ○	$u_{i-1}q_i^m$	0	m

○：絶縁破壊しなかった場合， ×：絶縁破壊した場合

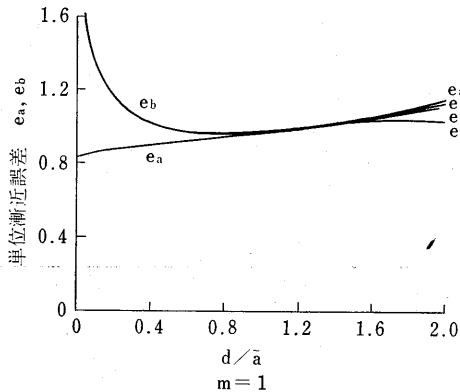


図3 推定値 \hat{a}, \hat{b} の単位漸近誤差 e_a, e_b

の求め方について既に第3章で述べた。ここでは、その方法に従って N が十分大きいときの与えられた (d, m) のもとでの単位漸近誤差を求め、パラメータ (d, m) と単位漸近誤差の関係を調べることに、最も推定精度の良い (d, m) を決定する。

まず、(25)式の V_{11}, V_{22} を求めるために(18)~(22)式で使用する k_i, l_i の期待値を求める。一つの供試物のステージ i での事象は表2のとおりであるから、 k_i, l_i の期待値は次式で表わされる。

$$k_i = N u_{i-1} p_i \sum_{t=0}^{m-1} q_i^t$$

$$= N u_{i-1} (1 - q_i^m)$$

$$= N (u_{i-1} - u_i) \dots \dots \dots (40)$$

$$l_i = N u_{i-1} \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} t q_i^t p_i \right\} + m q_i^m \dots \dots \dots (41)$$

ただし、

$$u_i = \prod_{j=0}^i q_j^m \dots \dots \dots (42)$$

これらの結果を使って、パラメータ (d, m) に対する単位漸近誤差 e_a, e_b の関係をプロットしたのが図3~図5である。図3、図4、図5はそれぞれ $m=1, 3, 5$ のときの d/\bar{a} に対する単位漸近誤差の関係を表わす。図中太線は、分布 G の平均がある電圧印加レベル y_i に一致した場合、細線は平均がある y_i と y_{i+1} との中間に位置する場合である。これらの図によると、 d/\bar{a} の変化に対して安定し、小さい単位漸近誤差を e_a, e_b 両方に対して示すのは $m=1$ の場合であることがわかる。更に、 $m=$

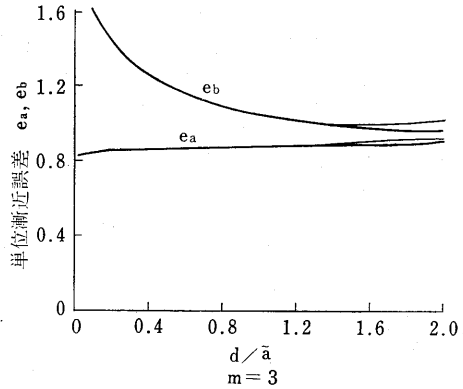


図4 推定値 \hat{a}, \hat{b} の単位漸近誤差 e_a, e_b

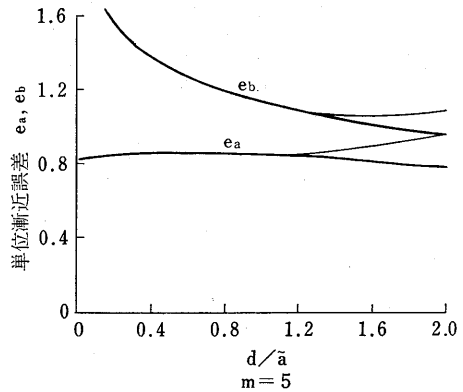


図5 推定値 \hat{a}, \hat{b} の単位漸近誤差 e_a, e_b

1のとき上記の性質を満たすのは $0.6 \leq d/\bar{a} \leq 1.2$ の範囲であることが図3よりわかる。従って \hat{a}, \hat{b} の推定精度を上げるには $m=1, 0.6 \leq d/\bar{a} \leq 1.2$ の条件で試験すれば良い。

6. N の設定について

第5章で得られた単位漸近誤差は、 N が十分大きいときに得られた値であった。実際の試験では供試物の数に制限があるので、第3章、第5章で得られた結果が適用できる N の最小値 N_{min} を知ることは重要なことである。そこで、 N をパラメータとしてモンテカルロシミュレーションを行い、次の二つのことについて調べた。

(i) 調査1：1回のシミュレーション結果から得られる \hat{e}_a, \hat{e}_b と図3の結果とを比較し、これらがほぼ一致する最小の N を求めること。

(ii) 調査2：シミュレーションを多数回を行い、各シミュレーションにより得られた推定値から、全シミュレーションに対する推定値 \hat{a}, \hat{b} の平均 μ_a, μ_b と標準偏差 σ_a, σ_b とを求める。次に、 μ_a, μ_b とシミュレーションに使った真値 \bar{a}, \bar{b} とを比較し、それらがほぼ一致する最小の N を求めること。更に、 $\sqrt{N}\sigma_a, \sqrt{N}\sigma_b$ と (N が大きいときの) 図3の e_a, e_b とを比較し、これらがほぼ一致する最小の N を求めること。

6.1 調査1の結果

シミュレーションの条件は次のとおりである。

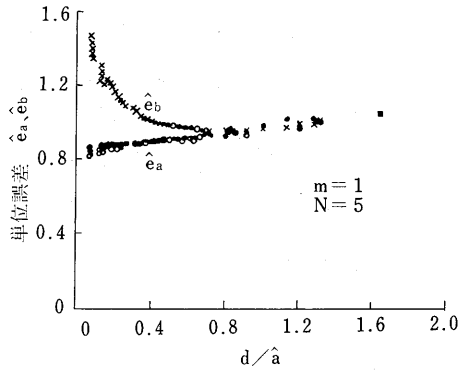


図6 シミュレーションにより得られた単位誤差

$N=5, 10, 20, 40, 100$
 $d=0.2, 0.4, 0.6, \dots, 2.0$
 $m=1$

分布は標準正規分布 ($\bar{a}=1, \bar{b}=0$)

適当な i に対して $y_i = \bar{b}$

同一パラメータ下での試行回数は20回

$N=5$ の場合で、各シミュレーションについて推定値 \hat{a}, \hat{b} を求め、パラメータ d/\hat{a} に対する単位誤差 \hat{e}_a, \hat{e}_b の値をプロットしたものが図6である。図6は図3とはほぼ一致しており、 N が5の場合でも(25)式から求められる単位誤差は正確に計算されていることがわかる。

6.2 課査2の結果

シミュレーション条件は次のとおりである。

$N=5, 10, 20, 40, 100$

$d=0.1, 0.3, 0.6, 0.8, 1.0, 1.4, 1.8$

$m=1$

分布は標準正規分布 ($\bar{a}=1, \bar{b}=0$)

適当な i に対し $y_i = \bar{b}$

同一パラメータ下での試行回数は 10^3 回

シミュレーションの結果、 $B\text{-level} \leq 1$ となった場合はこの調査対象としなかった。

図7に $B\text{-level} \geq 2$ の場合の頻度 n の分布を示す。同図より $B\text{-level} \leq 1$ となる場合を避けるには $d/\hat{a} \leq 1.6$, $N \geq 20$ と設定すればよいことがわかる。

$$\mu_a = \frac{1}{n} \sum_{B\text{-level} \geq 2} \hat{a} \dots\dots\dots (43)$$

$$\mu_b = \frac{1}{n} \sum_{B\text{-level} \geq 2} \hat{b} \dots\dots\dots (44)$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{n} \sum_{B\text{-level} \geq 2} (\hat{a} - \mu_a)^2 \dots\dots\dots (45)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{n} \sum_{B\text{-level} \geq 2} (\hat{b} - \mu_b)^2 \dots\dots\dots (46)$$

とすると、 d/\hat{a} に対する μ_a, μ_b の値をプロットしたものを図8、図9に、 $\sqrt{N}\sigma_a, \sqrt{N}\sigma_b$ の値をプロットしたものを図10、図11に示す。

図8によると、 μ_a は $d/\hat{a} \leq 1$ の範囲で真値より小さく、 $d/\hat{a} \geq 1.2$ の範囲で真値より大きくなる傾向を示すことがわかる。また図9によると、 μ_b は $d/\hat{a} \leq 1$ の範囲

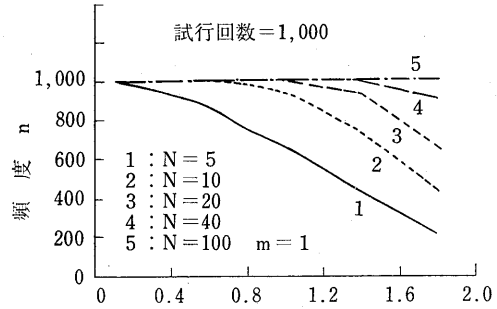


図7 $B\text{-level} \geq 2$ の場合の頻度

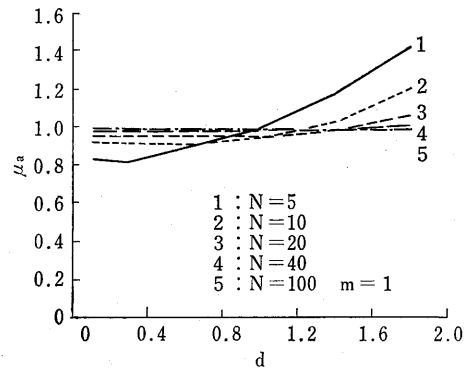


図8 d に対する μ_a の図

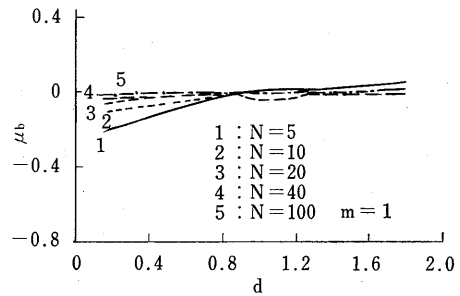


図9 d に対する μ_b の図

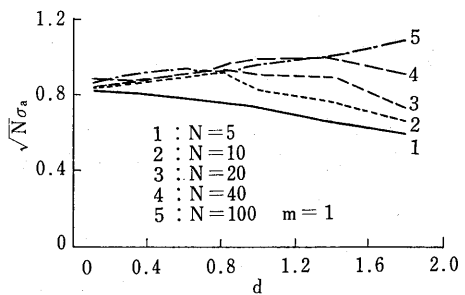


図10 d に対する $\sqrt{N}\sigma_a$ の図

で真値より小さくなる傾向を示すことがわかる。真値と推定値平均との偏差 h_a, h_b を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} h_a &= (\mu_a - \bar{a})/\bar{a} \\ h_b &= (\mu_b - \bar{b})/\bar{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

$0.6 \leq d/\hat{a} \leq 1.2$ の範囲で \hat{e}_a, \hat{e}_b は0.9以上であるから、 $N=5, 10, 20, 40, 100$ に対してこれらの偏差 h_a, h_b は推定誤差 $\sqrt{V_{11}} = \hat{e}_a \hat{a} / \sqrt{N}$, $\sqrt{V_{22}} = \hat{e}_b \hat{a} / \sqrt{N}$ に比べて約1/2以下になる(例えば、 $N=5$ で $h_a, h_b < 0.2$,

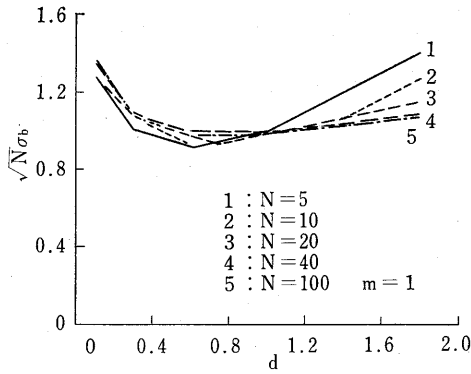


図11 d に対する $\sqrt{N}\sigma_b$ の図

$\sqrt{V_{11}}, \sqrt{V_{22}} > 0.40$) が、推定値 \hat{a} が小さくなることは、絶縁設計上問題があり注意する必要がある。しかし、同じ d/\hat{a} の範囲で $N \geq 20$ のときは、この偏差 h_a は推定誤差 $\sqrt{V_{11}}$ に比べて十分小さく ($N=20$ で $h_a < 0.05$, $\sqrt{V_{11}} > 0.20$)、推定値の信頼度を問題にするときは無視してよい。

図10によると $\sqrt{N}\sigma_a$ は $d/\hat{a} \leq 1.2$, $N \geq 20$ のとき図3の e_a とほぼ一致し、図11によると $\sqrt{N}\sigma_b$ は $N \geq 20$ のとき図4の e_b とほぼ一致することがわかる。

以上を総合すると、第3章、第5章で述べた結果が適用できるのは、 $0.6 \leq d/\hat{a} \leq 1.2$ の制限下で $N \geq 20$ のときであると言える。従って、 $N_{\min} = 20$ である。

7. む す び

絶縁破壊は確率の現象であり、絶縁破壊電圧がある分布関数に従うと仮定すれば、絶縁特性はその分布関数のパラメータによって表わすことができる。

一度絶縁破壊してしまおうと二度と供試物として利用できない絶縁体のインパルス絶縁破壊電圧を求める試験には上昇法が用いられるが、上昇法の試験から得られたデータから、絶縁破壊電圧の分布関数のパラメータを推定する方法については明らかになっていなかった。

本論文は、絶縁破壊電圧の分布関数を正規分布と仮定したときに、その平均 \hat{b} と標準偏差 \hat{a} の推定値と推定誤差とを最尤推定法によって求める方法を示し、併せて供試物の必要最小個数 N_{\min} 、印加電圧上昇幅 d と同一印加レベルでの試験回数 m との最適設定値について検討した結果を述べたものである。効率的な試験で信頼できる推定値を得るためには、 N_{\min} は20、 d は標準偏差 \hat{a} の0.6~1.2倍程度、 m は1に設定するのが望ましい。

なお、本論文で用いた推定法は、「インパルス絶縁破壊」のところを「衝撃破壊」、あるいは「死」と置きかえることで、機械系の破壊試験、生物系の薬効試験などにも応用できる可能性があり(文献(7)では昇降法が薬効試験として紹介されている)、この理論は一般性の高いものである。

この論文は、電気学会論文誌 A104 巻 8 号 P.464 (昭59-8)「上昇法によるインパルス絶縁破壊電圧の推定」

の転載である。

最後に、本研究について御指導いただいた九州大学理学部統計数学教室工藤昭夫教授に深く感謝します。

付 録

付表 単位漸近誤差 e_a, e_b ($m=1$)

d/\hat{a}	$b=y_i$		$b=(y_i+y_{i+1})/2$	
	e_a	e_b	e_a	e_b
0.04	0.84356	1.57251	0.84357	1.57252
0.08	0.85428	1.39591	0.85427	1.39589
0.12	0.86179	1.29267	0.86177	1.29266
0.16	0.86793	1.22111	0.86794	1.22113
0.20	0.87336	1.16765	0.87337	1.16766
0.24	0.87840	1.12606	0.87838	1.12604
0.28	0.88316	1.09285	0.88314	1.09284
0.32	0.88773	1.06594	0.88771	1.06593
0.36	0.89221	1.04395	0.89218	1.04394
0.40	0.89658	1.02588	0.89656	1.02587
0.44	0.90092	1.01105	0.90094	1.01106
0.48	0.90524	0.99891	0.90527	0.99892
0.52	0.90955	0.98904	0.90953	0.98904
0.56	0.91387	0.98113	0.91384	0.98112
0.60	0.91814	0.97487	0.91816	0.97488
0.64	0.92247	0.97008	0.92245	0.97008
0.68	0.92677	0.96656	0.92680	0.96657
0.72	0.93115	0.96417	0.93111	0.96416
0.76	0.93548	0.96276	0.93547	0.96276
0.80	0.93984	0.96222	0.93987	0.96223
0.84	0.94428	0.96248	0.94426	0.96249
0.88	0.94865	0.96342	0.94870	0.96345
0.92	0.95305	0.96498	0.95323	0.96504
0.96	0.95747	0.96711	0.95771	0.96719
1.00	0.96190	0.96975	0.96226	0.96985
1.04	0.96637	0.97285	0.96685	0.97295
1.08	0.97081	0.97638	0.97147	0.97646
1.12	0.97528	0.98030	0.97618	0.98032
1.16	0.97980	0.98458	0.98081	0.98450
1.20	0.98437	0.98920	0.98545	0.98894
1.24	0.98901	0.99415	0.99008	0.99363
1.28	0.99377	0.99939	0.99468	0.99852
1.32	0.99857	1.00491	0.99923	1.00360
1.36	1.00349	1.01070	1.00370	1.00884
1.40	1.00857	1.01673	1.00808	1.01422
1.44	1.01382	1.02299	1.01241	1.01973
1.48	1.01930	1.02945	1.01646	1.02537
1.52	1.02504	1.03609	1.02032	1.03112
1.56	1.03110	1.04290	1.02392	1.03699
1.60	1.03755	1.04985	1.02720	1.04297
1.64	1.04447	1.05691	1.03010	1.04907
1.68	1.05201	1.06408	1.03255	1.05529
1.72	1.06007	1.07131	1.03449	1.06164
1.76	1.06885	1.07859	1.03587	1.06813
1.80	1.07845	1.08590	1.03664	1.07477
1084	1.08895	1.09321	1.03676	1.08156
1.88	1.10045	1.10050	1.03622	1.08851
1.92	1.11302	1.10775	1.03502	1.09563
1.96	1.12677	1.11493	1.03316	1.10293
2.00	1.14177	1.12202	1.03068	1.11041

参 考 文 献

- (1) 笈川：「衝撃電圧による放電率の決定法に就いて」, 日立評論, 35, 777 (昭28-5)
- (2) JEC：「インパルス電圧電流試験一般」, JEC-212-1981, p. 21 (昭57) 電気書院
- (3) W. J. Dixon & A. M. Mood: "A Method for obtaining and analyzing sensitivity data", *J. Amer. Statistical Association*, 43, 109 (1948)
- (4) 竹内・大橋「統計的推測—2 標本問題」, 入門現代の数学 (数学セミナー増刊), p. 31 (昭56) 日本評論社
- (5) 広瀬：「Newton-Raphson 法を用いた最尤推定法によるインパルスフラッシュオーバー電圧の推定」, 高岳レビュー, 29, 194 (昭57)
- (6) S. M. Kendall & A. Stuart: *The Advanced Theory of Statistics*, 2, 59 (1971) Griffin
- (7) 佐久間：薬効評価——計画と解析, I, p. 327 (昭52) 東大出版会
- (8) 広瀬：上昇法によるインパルス絶縁破壊電圧の推定, 電気学会論文誌A104巻8号, p. 464 (昭59-8)