

Newton-Raphson法を用いた最尤推定法による インパルスフラッシュオーバー電圧の推定

Estimation of Impulse Flashover Voltage by Maximum Likelihood Method with Newton Raphson Method

内容梗概

インパルスフラッシュオーバー電圧が正規分布にしたがうと仮定するとき、その平均、分散は最尤推定法により推定することができる。最尤推定法の計算は一般には複雑であるが、同時に Newton Raphson 法を用いることによって、推定値を数値解析的に求めることができる。更に、この方法によれば、昇降法の長所と補間法の長所を同時に持つデータサンプリングのデザインが可能である。

広瀬 英雄* Hideo Hirose

1. まえがき

インパルスフラッシュオーバー電圧が正規分布にしたがうと仮定するとき、その平均、分散を求める方法として、昇降法、補間法などが利用されている。昇降法は、平均の推定精度が良く、補間法は分散の推定精度が良いのでそれぞれの特徴を生かす分野で試験法が選ばれているようである。

昇降法により得られたデータから、最尤推定法を用いて、推定値を得る近似式を導いたのは Dixon⁽¹⁾であり、この式の誘導過程についてはすでに報告した⁽²⁾。この Dixon の導いた近似解法（以下 Dixon 法という）をもとにして、昇降回数の影響を考えた誤差の値の報告やあるいは推定値の補正係数等も提案されている⁽³⁾⁽⁴⁾。これらの報告の中には、昇降回数が少ないところでの議論も多く、推定誤差が最尤推定法を使う際の漸近理論のサンプル数の影響によるものなのか、Dixon 法の近似誤差によるものなのかは明らかにされていない。そこで、今回の報告では、最尤推定値を Newton Raphson 法を用いて直接数値解析的に求め（以下 Newton 法という）Dixon 法の近似誤差をとる試みを行い、Newton 法と Dixon 法の比較を行うことにより、逆に、この Dixon 法の近似誤差を調べてみた。

また、Newton 法を使うことで、昇降法、補間法の試験方法から解放され、平均、分散の推定精度を自由に決定できるデータサンプリングのデザインも可能となる。本報告では、昇降法と補間法を組みあわせて、平均、分

散を同一の精度で推定する方法を提案する。

2. Newton Raphson 法を用いた最尤推定法

2.1 理論

フラッシュオーバー電圧 y は平均 \bar{b} 、分散 a^2 の正規分布にしたがうと仮定する。試験を t 個の印加電圧レベル y_1, y_2, \dots, y_t で行い、レベル y_i で試験したときに放電した回数を n_i 、放電しなかった回数を m_i とする。このとき、印加電圧レベル y_i で放電する確率は、

$$p_i = \int_{-\infty}^{y_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left(-\frac{(y-\bar{b})^2}{2a^2}\right) dy \quad \dots\dots\dots(1)$$

と与えられる。

このデータがシークンシャルにはなく、独立にサンプリングされたと仮定するとき、例えば印加電圧 y_i での放電は $((n_i+m_i)$ 回の試行のうち n_i 回放電したので) 確率 $C_{n_i} p_i^{n_i} (1-p_i)^{m_i}$ で実現されたとみなすことができる。したがって、尤度関数 L を

$$L = \prod_{i=1}^t C_{n_i} p_i^{n_i} (1-p_i)^{m_i} \quad \dots\dots\dots(2)$$

とすればよい。 a, \bar{b} の推定値は、尤度関数 L を最大にする a, \bar{b} を見つけることによって得られる。ここでは L の最大値をとる a, \bar{b} を見つける代りに $\log L$ の極値をとる a, \bar{b} を見つける。

今、適当に a_0, \bar{b}_0 を決め、 $\partial \log / \partial a, \partial \log / \partial \bar{b}$ を a_0, \bar{b}_0 の近傍で Taylor 展開し、1 次の項まで近似すれば、

* 研究所

$$\left[\frac{\partial \log L}{\partial a} \right]_{a,b} = \left[\frac{\partial \log L}{\partial a} \right]_{a_0,b_0} + (a-a_0) \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial a^2} \right]_{a_0,b_0} + (b-b_0) \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial b} \right]_{a_0,b_0} \dots \dots \dots (3)$$

$$\left[\frac{\partial \log L}{\partial b} \right]_{a,b} = \left[\frac{\partial \log L}{\partial b} \right]_{a_0,b_0} + (a-a_0) \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial b \partial a} \right]_{a_0,b_0} + (b-b_0) \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial b^2} \right]_{a_0,b_0} \dots \dots \dots (4)$$

ここで,

$$\left[\frac{\partial \log L}{\partial a} \right]_{a,b} = 0, \quad \left[\frac{\partial \log L}{\partial b} \right]_{a,b} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

と仮定すれば, (3), (4)の修正値 $\delta a = a - a_0$, $\delta b = b - b_0$ は

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial a^2} \right]_{a_0,b_0} & \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial b} \right]_{a_0,b_0} \\ \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial b \partial a} \right]_{a_0,b_0} & \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial b^2} \right]_{a_0,b_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial \log L}{\partial a} \right]_{a_0,b_0} \\ \left[\frac{\partial \log L}{\partial b} \right]_{a_0,b_0} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (6)$$

を解くことによって得られる。求められた δa , δb より $a_1 = a_0 + \delta a$, $b_1 = b_0 + \delta b$ とおき, (6)の a_0 , b_0 を a_1 , b_1 で置き換え, 上の手続きを a_0 , b_0 が安定するまで繰り返せば, \hat{a} , \hat{b} の最尤推定値 \hat{a} , \hat{b} を得ることができる。

推定値 \hat{a} , \hat{b} の分散は次のようにして求めることができる。

今, 表現を簡単にするために次のように, 記号を定める。

$$\theta_1 = a, \quad \theta_2 = b$$

真値に対しては, θ , 最尤推定値に対しては, $\hat{\theta}$ と表現する。

$$\int \dots \int L dx_1 \dots dx_n = 1 \dots \dots \dots (7)$$

なので, (7)を θ_s について微分して,

$$\int \dots \int \frac{\partial L}{\partial \theta_s} dx_1 \dots dx_n = 0 \dots \dots \dots (8)$$

書き直せば,

$$E \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta_s} \right) = \int \dots \int \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta_s} \right) L dx_1 \dots dx_n = 0 \dots \dots \dots (9)$$

更に(9)を再度 θ_r について微分すると,

$$\int \dots \int \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_r} \right) \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta_s} \right) + L \frac{\partial}{\partial \theta_r} \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta_s} \right) \right\} dx_1 \dots dx_n = 0 \dots \dots \dots (10)$$

つまり,

$$\int \dots \int \left\{ \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta_r} \right) \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta_s} \right) + \left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right) \right\} L dx_1 \dots dx_n = 0 \dots \dots \dots (11)$$

したがって, (12)式が成立する。

$$-E \left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right) = E \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta_r} \cdot \frac{\partial \log L}{\partial \theta_s} \right) \dots \dots \dots (12)$$

さて, (6)式は

$$\left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta_r} \right)_{\hat{\theta}} = \sum_{s=1}^2 (\hat{\theta}_s - \theta_s) \left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right)_{\theta^*} \dots \dots \dots (13)$$

($r=1, 2$
 θ^* は $\hat{\theta}$ と θ との間にある。)

と書け, θ^* は $\hat{\theta}$ に確率収束するので,

$$\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right)_{\theta^*} \rightarrow E \left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right) \dots \dots \dots (14)$$

となる。そこで(13)式は $(\hat{\theta}_r - \theta_r)$ を未知数とするような次の形の線型方程式に書くことができる。

$$Y = V^{-1}Z \dots \dots \dots (15)$$

ここに,

$$Y = \frac{\partial \log L}{\partial \theta}, \quad Z = \hat{\theta} - \theta,$$

$$V_{rs}^{-1} = E \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta_r} \cdot \frac{\partial \log L}{\partial \theta_s} \right) \dots \dots \dots (16)$$

また, $\partial \log L / \partial \theta_r = 0$ ($r=1, 2$) なので, 中心極限定理によれば, Y は平均0の多変量正規分布にしたがい, Z も平均0の多変量正規分布にしたがる。

Y の分散行列は V^{-1} であるから, Z の分散行列は(15)式より V となる。つまり, 推定値 $\hat{\theta}$ の分散は Z の分散行列 V の対角要素で与えられ, これは, (12)~(16)式によると, 推定値を得る過程で使われる(6)式の左辺の行列をそのまま利用できるということである⁽⁶⁾。

2.2 適用例

実験により得られたデータが第1表のとおりであったとする。(このデータは昇降法の実験を行っているときの実測データの1つであるが, 昇降幅が一定値ではないため, 正確には昇降法のデータとはいえない。)

今, (6)式を $A\theta = B$ と書く, このとき a , b の初期値 a_0 , b_0 を $a_0 = 30$, $b_0 = 650$ にとれば,

$$A = \begin{pmatrix} -2.40 \times 10^{-2} & -1.19 \times 10^{-7} \\ -1.19 \times 10^{-7} & -2.75 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (17)$$

$$B = \begin{pmatrix} -1.04 \times 10^{-1} \\ -2.05 \times 10^{-1} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (18)$$

となり,

$$\theta = \begin{pmatrix} 8.21 \times 10^{-1} \\ 7.10 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (19)$$

第1表 サンプルデータ例

印 加 電 圧 y_i	放 電 し な か っ た 回 数 m_i	放 電 し た 回 数 n_i
740	0	1
710	1	2
681	2	12
651	12	9
621	9	1
591	1	0

を得る。したがって1回目の修正値は

$$a_1 = a_0 + \delta a = 30 + 8.21 \times 10^{-1} = 30.821$$

$$b_1 = b_0 + \delta b = 650 + 7.10 = 657.10$$

とすることができる。この a_1, b_1 を新しい a_0, b_0 に置き換えて上の操作を繰り返すと第2表を得、推定値は、

$$\hat{a} = 34.0$$

$$\hat{b} = 657.4$$

となる。

第2表 Newton 法の繰り返し過程

繰り返し回数	a の推定値 \hat{a}	b の推定値 \hat{b}
0	30	650
1	30.821	657.10
2	33.3412	657.38
3	34.0016	657.43
4	34.037976	657.43652
5	34.037975	657.43651

最後の段階で、 \hat{a}, \hat{b} の分散は次のように求めることができる。

$$-A = \begin{pmatrix} 1.054 \times 10^{-2} & 1.67 \times 10^{-5} \\ 1.67 \times 10^{-5} & 2.21 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(20)$$

したがって、

$$-A^{-1} = \begin{pmatrix} 9.483 \times 10^1 & -7.17 \times 10^{-2} \\ -7.17 \times 10^{-2} & 4.515 \times 10^1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(21)$$

これより、 \hat{a} の分散は94.83、 \hat{b} の分散は45.15で与えられることがわかる。別の言い方をすれば、 \hat{a}, \hat{b} の90%信頼区間は、

$$\hat{a} \text{ の } 90\% \text{ 信頼区間} = [34.0 - 1.64\sqrt{94.83}, 34.0 + 1.64\sqrt{94.83}] = [18.0, 50.0]$$

$$\hat{b} \text{ の } 90\% \text{ 信頼区間} = [657.4 - 1.64\sqrt{45.15}, 657.4 + 1.64\sqrt{45.15}] = [646.4, 668.4]$$

であるといえることができる。

3. 昇降法への適用⁽⁶⁾

昇降法のデータサンプリング方法は、電圧昇降幅 d を一定にして、印加電圧レベル y_i で放電したら印加電圧を下げ、放電しなかったら印加電圧を上げるという手続きをとる。レベル y_i で放電した回数を n_i 、放電しなかった回数を m_i とするとき、 $|n_i - m_i| = 0 \text{ or } 1$ となり、したがって、 n_i の分布が持っている情報と、 m_i のそれとがほぼ同一となるので、どちらか一方のデータを使えば母数の推定を行うことができることを示したのは Dixon であった。

Newton Raphson 法を使えば、上述のことを仮定しなくてもよく、放電した回数の分布、放電しなかった回数の分布の両方を同時に利用するので、Dixon の示した計算式よりも高い精度の推定値を期待することができる。……(特徴 I)

また、昇降法では予備試験を行い、そのデータをもとに、初期印加電圧と昇降幅 d を定める必要があった。Newton Raphson 法によると、この予備試験データも直接推定値を求めるときのデータとして再利用できるため、Dixon の示した計算式による推定値よりも推定精度が良くなることが期待される。……(特徴 II)

特徴 II を説明するために簡単な例を示す。

サンプルデータ数 $T_1 = 20$ の予備試験で次の情報を得たとする。

$$\text{平均 } b_1 = 0, \quad b_1 \text{ の分散} = 0.0886 \text{ (注1)}$$

$$\text{標準偏差 } a_1 = 1, \quad a_1 \text{ の分散} = 0.3070 \text{ (注2)}$$

この情報をもとに、電圧昇降幅 $d_2 = 1.5$ と決定しサンプルデータ数 $T_2 = 40$ の本試験で次の情報を得たとする。

$$\text{平均 } b_2 = 0, \quad b_2 \text{ の分散} = 0.05787 \text{ (注2)}$$

$$\text{標準偏差 } a_2 = 1, \quad a_2 \text{ の分散} = 0.08141 \text{ (注2)}$$

予備試験データと本試験データの両方を使ったとして、Newton Raphson 法で計算すれば、

$$\text{平均 } b = 0 \text{ (注3)} \quad b \text{ の分散} = 0.03500 \text{ (注3)}$$

$$\text{標準偏差 } a = 1 \text{ (注3)} \quad a \text{ の分散} = 0.06435 \text{ (注3)}$$

を得、Dixon の示した計算の方法でこの精度を得ようと思えば、 b の場合サンプル数66、 a の場合サンプル数51が必要である(昇降幅 $d = 1.5$)。

(注1) 予備試験も昇降法で行ったと仮定し、昇降幅 $d = 0.5$ のときの分散の理論値とした。

(注2) 昇降幅 $d_2 = 1.5$ のときの分散の理論値とした。

(注3) 予備試験のときの尤度関数を L_1 、本試験のときの尤度関数を L_2 とすれば、2つの試験を合わせたときの尤度関数は $L = L_1 L_2$ 、したがって、

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \log L}{\partial a} \right]_{a=1, b=0} &= \left[\frac{\partial \log L_1}{\partial a} \right]_{a=1, b=0} \\ &+ \left[\frac{\partial \log L_2}{\partial a} \right]_{a=1, b=0} = 0 \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial \log L}{\partial b}\right]_{a=1, b=0} = \left[\frac{\partial \log L_1}{\partial b}\right]_{a=1, b=0} + \left[\frac{\partial \log L_2}{\partial b}\right]_{a=1, b=0} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

これより、 a の推定値=1, b の推定値=0 を得る。また、

$$\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial a^2}\right]_{a=1, b=0} = \left[\frac{\partial^2 \log L_1}{\partial a^2}\right]_{a=1, b=0} + \left[\frac{\partial^2 \log L_2}{\partial a^2}\right]_{a=1, b=0} \doteq (-1/0.3070) + (-1/0.08141) = -15.14 \dots\dots\dots(24)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial b^2}\right]_{a=1, b=0} = \left[\frac{\partial^2 \log L_1}{\partial b^2}\right]_{a=1, b=0} + \left[\frac{\partial^2 \log L_2}{\partial b^2}\right]_{a=1, b=0} \doteq (-1/0.0886) + (-1/0.05787) = -28.57 \dots\dots\dots(25)$$

より、 a の分散 $\doteq 1/15.54 = 0.06435$, b の分散 $\doteq 1/28.57 = 0.03500$ を得る。

特徴 I については、Newton Raphson 法と Dixon の示した計算方法の差をモンテカルロシミュレーションによって求めた。

3.1 モンテカルロ法による昇降法の Newton 法と Dixon 法の比較

3.1.1 シミュレーション方法

シミュレーションは次のパラメータのもとに各々 100 回行った。

サンプル数 $T=20, 50, 100$

昇降幅 $d=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$

分布は、標準正規分布 $N(0, 1)$ である。初期設定値は、 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ の中から一様選んだ。シミュレーションにより求めた数値は次のとおりである。

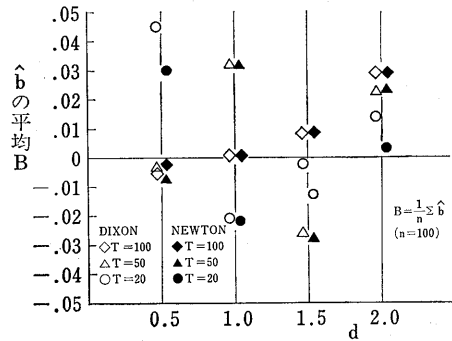
- \hat{a}_N : Newton 法による標準偏差の推定値
- \hat{b}_N : Newton 法による平均の推定値
- $e(\hat{a}_N)$: Newton 法による \hat{a}_N の誤差 (標準偏差)
- $e(\hat{b}_N)$: Newton 法による \hat{b}_N の誤差 (標準偏差)
- \hat{a}_D : Dixon 法による標準偏差の推定値
- \hat{b}_D : Dixon 法による平均の推定値
- $e(\hat{a}_D)$: Dixon 法による \hat{a}_D の誤差 (標準偏差の理論値)
- $e(\hat{b}_D)$: Dixon 法による \hat{b}_D の誤差 (標準偏差の理論値)

但し、理論値とは、ここでは $T \rightarrow \infty$ のときのそれぞれの値をあらわす。

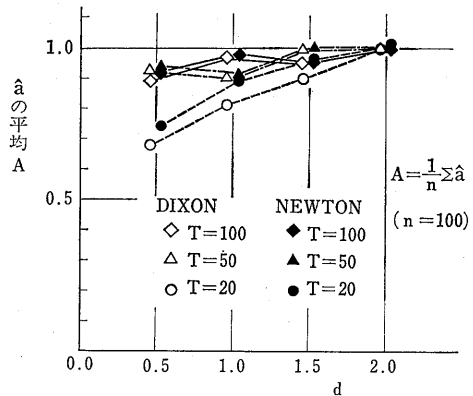
3.1.2 推定値の比較

(i) 平均の推定値の平均

平均の推定値 \hat{b} の平均 $B = \frac{1}{n} \sum \hat{b}$ のグラフを第 1 図に示す。Newton 法, Dixon 法に違いは見られない。



第 1 図 推定値 \hat{b} の平均



第 2 図 推定値 \hat{a} の平均

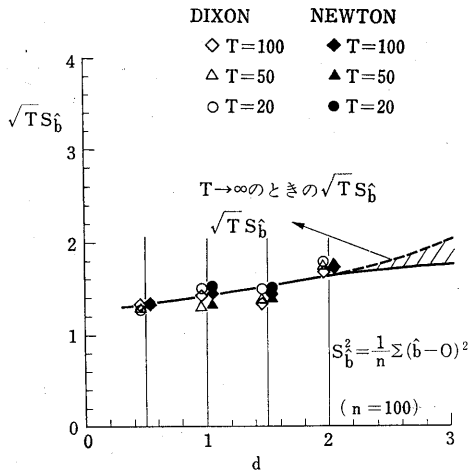
(ii) 標準偏差の推定値の平均

標準偏差の推定値 \hat{a} の平均 $A = \frac{1}{n} \sum \hat{a}$ のグラフを第 2 図に示す。昇降幅 d が小さくなるほど、またサンプル数が小さくなるほど、推定値 \hat{a} が 1 より小さくなる傾向があることはすでに報告されている⁽²⁾。ここで注目されるのは、Newton 法で求めた推定値の方が Dixon 法で求めたそれよりも 1 に近いということである。

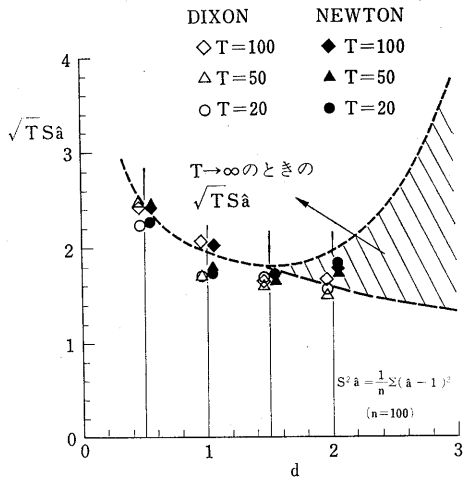
(iii) 平均の推定値の 2 次モーメント

平均の推定値 \hat{b} の 0 を中心とする 2 次のモーメントを $S_b^2 = \frac{1}{n} \sum (\hat{b} - 0)^2$ とするとき $\sqrt{T} S_b$ のグラフを第 3 図に示す。Newton 法, Dixon 法ともに理論値の誤差 ($T \rightarrow \infty$) に近いが、両者の間に差は見られない。

(vi) 標準偏差の推定値の 2 次モーメント



第3図 推定値 \hat{b} の 1 のまわりの分散の平方根



第4図 推定値 \hat{a} の 1 のまわりの分散の平方根

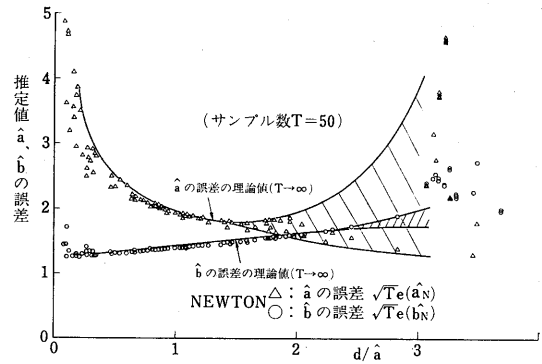
標準偏差の推定値 a の 1 を中心とする 2 次モーメントを $S_{\hat{a}}^2 = \frac{1}{n} \sum (\hat{a} - 1)^2$ とするとき $\sqrt{T} S_{\hat{a}}$ のグラフを第 4 図に示す。Newton 法, Dixon 法ともに, 理論値誤差 ($T \rightarrow \infty$) に近い。

以上(i)~(vi)をまとめると, 標準偏差の推定に関しては Newton 法の方が Dixon 法よりも正確であるといえることができる。

3.1.3 推定誤差の比較

Newton 法では, 平均, 分散の推定値とともにそれらの誤差 (ここでは, 推定値の標準偏差) も計算できる。

ここでは代表例として, サンプル数 $T=50$ の場合の平均の推定値 \hat{b}_N の誤差, 標準偏差の推定値 \hat{a}_N の誤差のグラフを第 5 図に示す (プロットの点の数は約 150 で, 誤差はいずれも 1 データあたりに換算している。) 第 5 図によると, 平均 \hat{b}_N の誤差 $\sqrt{T} e(b_N)$, 標準偏差 \hat{a}_N の誤差 $\sqrt{T} e(a_N)$ は理論値 ($T \rightarrow \infty$) に近い値をとること



第5図 推定値 \hat{a}_N, \hat{b}_N の誤差

がわかる。

Dixon の計算法では, 誤差は第 5 図で $T \rightarrow \infty$ としたときの理論値を使う。

3.1.4 仮説検定による推定値の比較

推定値と推定誤差をもとに, シミュレーションに用いた分布のパラメータ (平均=0, 分散=1) の仮説検定を Newton 法, Dixon 法の場合についてそれぞれ求めてみた。有意水準 $\alpha=0.01, 0.05$ の 2 ケースについて比較した結果が第 3 表である。ここに仮説検定の条件は次のとおりである。

$$\begin{cases} \text{仮説 } H_0; \hat{a} = 1 \\ \text{対立仮説 } H_1; \hat{a} \neq 1 \end{cases}$$

あるいは,

$$\begin{cases} \text{仮説 } H_0; \hat{b} = 0 \\ \text{対立仮説 } H_1; \hat{b} \neq 0 \end{cases}$$

第 3 表は 100 個の仮説検定に対し, H_0 を採択する個数をとったものである。理想的には $\alpha=0.01$ の場合 H_0 の採択個数は 99, $\alpha=0.05$ の場合 95 である。

この表によれば, Newton 法の方が Dixon 法よりも理想的な値の H_0 採択個数を持つことがわかる。

以上, 3.1.1~3.1.4 までシミュレーションをもとに Newton 法と Dixon 法の比較を行ったが, 推定値, 推定誤差ともに考慮した 3.1.4 の仮説検定による比較の結果から, Newton 法の方が Dixon 法よりも良い推定精度を得るということが出来る。

4. 補間法への適用

補間法は, フラッシュオーバ率が 20% と 80% の間では, フラッシュオーバ電圧とフラッシュオーバ率とはほぼ直線的な関係にあることを利用して, フラッシュオーバ電圧の平均を求める方法である。適当に 2 点の電圧 V_1, V_2 を決めて, その点で集中的に電圧を印加し, フラッシュオーバ率を求め, それを, それぞれ p_1, p_2 とするとき, $(V_1, p_1), (V_2, p_2)$ の 2 点を正規確率紙上にプロットし, 直

第3表 Newton 法と Dixon 法の仮説検定による比較

サンプル数 T	昇降幅 d	平均 b		標準偏差 a	
		Newton 法	Dixon法	Newton 法	Dixon法
20	0.5	90	89	78	69
	1.0	92	90	97	87
	1.5	99	99	99	96
	2.0	99	97	100	98
50	0.5	97	98	89	87
	1.0	98	99	95	95
	1.5	99	99	97	96
	2.0	98	98	100	100
100	0.5	96	96	90	89
	1.0	97	98	96	94
	1.5	98	99	99	99
	2.0	98	98	99	99

$\alpha=0.01$

サンプル数 T	昇降幅 d	平均 b		標準偏差 a	
		Newton 法	Dixon法	Newton 法	Dixon法
20	0.5	85	82	72	64
	1.0	85	83	73	70
	1.5	92	94	93	96
	2.0	91	86	99	98
50	0.5	92	92	81	78
	1.0	93	95	88	88
	1.5	96	96	96	95
	2.0	95	97	98	100
100	0.5	89	89	79	78
	1.0	93	94	91	87
	1.5	94	93	96	97
	2.0	93	91	97	97

$\alpha=0.05$

線で結ぶことにより、フラッシュオーバ電圧の平均と標準偏差を求めることができる。今、標準正規分布 $N(0, 1)$ をもとに補間法のデータをモンテカルロシミュレーションにより求めたものを第4表に示す。このデータをもとにして、正規確率紙を使って、フラッシュオーバ電圧の平均と標準偏差を求めたのが第6図である。

図より、平均=0.08、標準偏差=0.9であることがわかる。

一方、Newton 法を用いた最尤推定法によれば、

平均 $\hat{b}=0.0790$ 、 \hat{b} の標準偏差=0.1204

標準偏差 $\hat{a}=0.9001$ 、 \hat{a} の標準偏差=0.2153

を得る。

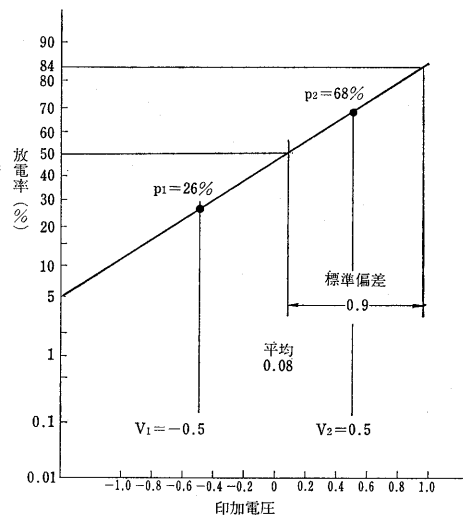
推定値は確率紙を使っても最尤推定法でも全く同じ値をとる。

第4表 モンテカルロシミュレーションによる補間法のデータ

印加電圧 y_i	放電しなかった回数 m_i	放電した回数 n_i
-0.5	37	13
0.5	16	34

5. 昇降法と補間法を組み合わせたサンプリングのデザイン

昇降法では平均の推定精度が良く、補間法では分散の推定精度が良いことが知られている。そこで、昇降法と補間法を組み合わせ、適当にデータサンプリングのデザ



第6図 正規確率紙を使った補間法の母数の推定

インを行えば、平均、分散の推定精度ともに良くなることが期待される。ところが、昇降法では Dixon の計算式、補間法では、正規確率紙をそれぞれ使うので、これらの2法を組み合わせた場合の推定値の求め方には工夫が必要である。最も単純な考え方は、まず平均の推定精度の良い昇降法で (Dixon の計算式を使って) 平均を求め、次に補間法により (正規確率紙を使って) 分散を求めるという方法であり、これは河野氏により提案されている⁽³⁾。ところが、この方法だと平均と分散の推定精度が不明であるばかりでなく、本当に精度良く、平均と分散を求めているのか全く不明である。

一方最尤推定法に Newton 法を用いる場合、昇降法、

補間法のデータサンプリング方法には無関係に、母数の推定値と推定誤差を求めることができる。したがって、基本的には、昇降法と補間法とを適当に組み合わせ、平均と分散の推定精度をともに上げるようにサンプリング方法を考え、実際の推定値とその誤差を求める計算は、Newton法を用いた最尤推定法によれば良い⁽⁷⁾。

5.1 サンプリングデザイン

サンプル数 T が大きければ、(1), (2)より、

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial a^2} = - \sum_{i=1}^t \left(\frac{n_i}{p_i^2} + \frac{m_i}{(1-p_i)^2} \right) \left(\frac{z_i}{a} \right)^2 n_i^2 \dots\dots\dots(26)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial a \partial b} = - \sum_{i=1}^t \left(\frac{n_i}{p_i^2} + \frac{m_i}{(1-p_i)^2} \right) \left(\frac{z_i}{a} \right)^2 n_i \dots\dots\dots(27)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial b^2} = - \sum_{i=1}^t \left(\frac{n_i}{p_i^2} + \frac{m_i}{(1-p_i)^2} \right) \left(\frac{z_i}{a} \right)^2 \dots\dots\dots(28)$$

となる。ここに、

$$x_i = \frac{y_i - b}{a}, \quad z_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right) \dots\dots\dots(29)$$

今、2点サンプリング法を、 $\beta \pm \alpha$ の2点でそれぞれ等しい回数で試験する方法と定義する。推定誤差は(16)式の (V_{ij}) で与えられるから、以下、 $\sqrt{V_{ij}}$ を最小にするサンプリング方法を考える。

第7図に location parameter β を \tilde{b} にとり、scale parameter α/\tilde{a} に対する、 \hat{a} , \hat{b} の推定誤差を示す。第7図によれば、 \hat{a} の推定精度を上げるには $\alpha \cong \tilde{a} \sim 2\tilde{a}$, \hat{b} の推定精度を上げるには $\alpha \cong 0$ で集中的にサンプルすれば良いことがわかる。

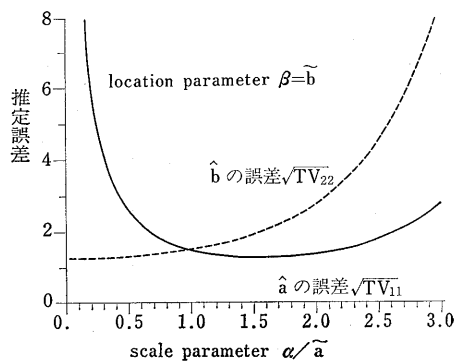
第8図に scale parameter α/\tilde{a} を \hat{a} の推定精度を最大にする値1.6にとり、location parameter β に対する \hat{a} , \hat{b} の推定誤差を示す。第8図によれば、location parameter に対して \hat{a} の誤差は敏感であるが、 \hat{b} の誤差は鈍感であることがわかる。

一方、昇降法によりサンプルされたデータによる \hat{a} , \hat{b} の推定誤差のグラフは第9図のとおりであり、 \hat{b} の誤差は、scale parameter, location parameter の変化に対して、安定した高い精度を保っていることがわかる。Dixon は \hat{b} の推定精度を上げるには昇降幅 d を \tilde{a} に近くとることを勧めている。

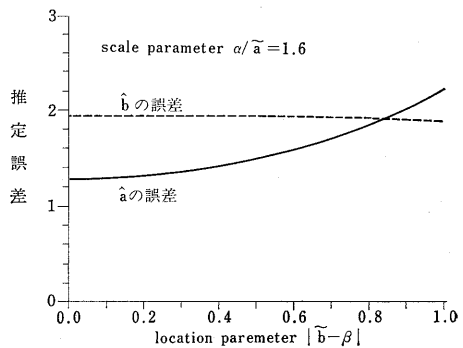
第7図~第9図を参考にすれば、 \hat{a} の推定精度を上げるサンプリング法として、

- (i) 昇降法により T_1 回試験し、 \tilde{a} , \tilde{b} の推定値 \tilde{a} , \tilde{b} を求める (昇降幅 $d \cong \tilde{a}$ に設定)
- (ii) \tilde{a} , \tilde{b} の値を使って、2点サンプリング法により T_2 回試験する ($\alpha = 1.5\tilde{a}$)

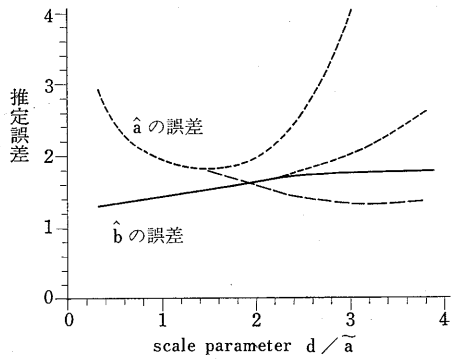
というサンプリング方法を提案できる。この方法によれば、昇降法により、推定値 \tilde{b} は安定した高い精度で求められ、したがって、次の2点サンプリング法では、推定値も安定した高い精度で求めることができる。第10図に



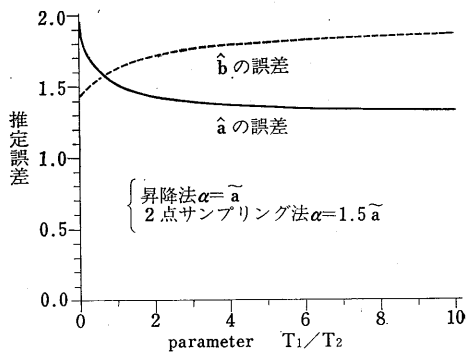
第7図 2点サンプリング法による誤差(1)



第8図 2点サンプリング法による推定誤差(2)



第9図 昇降法による推定誤差



第10図 2点サンプリング法と昇降法を組み合わせたときの推定誤差

昇降幅 $d=a$ で T_1 回昇降法を行い、 $\alpha=1.5a$ で T_2 回 2点サンプリング法を行ったときの T_2/T_1 に対する \hat{a} , \hat{b} の推定誤差を示す。第10図によれば、 $T_1=60$, $T_2=40$ の場合、 $\sqrt{V_{11}}=\sqrt{V_{22}}=0.158$ だから信頼度90%で \hat{a} の誤差、 \hat{b} の誤差共に26% ($1.64 \times 0.158=0.26$) 以内になるが、 $T_1=100$, $T_2=0$ の場合 (すなわち昇降法だけの場合) 信頼度90%で \hat{a} の誤差は30%以内、 \hat{b} の誤差は25%以内となる。

2点サンプリング法では2点での試験回数が等しいとしていた。補間法には特にこの規定はないが、ここでは2点サンプリング法と補間法とを同じ方法ということにする。なお、補間法で、2点のサンプリング数のバランスが大きくちがう場合、推定精度は悪くなる。

5.2 モンテカルロシミュレーション

5.1 で述べた理論の確認をするために、モンテカルロシミュレーションを次のとおり行った。

A: 昇降法で昇降回数 100回

B: 昇降法で60回の昇降を繰り返した後、平均と標準偏差を推定し、その推定値に基づいて、平均を中心として、標準偏差の1.5倍の距離の2点で20回づつ集中的に試験する。

A, Bともに、昇降法の昇降幅 $d=1.0$ である。また、シミュレーションに用いた分布は、標準正規分布 $N(0, 1)$

第5表 昇降法、昇降法と補間法の組み合わせ法のサンプルデータ例

印加電圧 y_i	昇降法 100回		昇降法 60回 補間法 60回		組み合わせ法
	放電しなかった回数 m_i	放電した回数 n_i	放電しなかった回数 m_i	放電した回数 n_i	
-1.5377	—	—	18	2	
-1.5162	11	0	7	0	
-0.5162	21	11	13	7	
0.4838	17	21	9	13	
1.4838	1	17	1	9	
1.7704	—	—	0	20	
2.4838	0	1	0	1	

である。A法とB法の比較を行うために、A法の乱数とB法の乱数は全く同一とした。試験は各々10回行った。

第5表はA, B2法で得られたデータ例を示す。B法では、昇降法により、平均=0.1164, 標準偏差=1.1027を得、そのデータをもとに、集中的に試験する2点を-1.5377, 1.7704としている。

第6表にA, B法で得られた推定値の比較表を示す。第6表によると、推定値、推定誤差ともに、理論値をよく表わしていることがわかる。

第6表 昇降法、昇法と補間法の組み合わせ法のシミュレーション比較

ケース	A. 昇降法 $T_1=100, T_2=0$				B. 昇降法と補間法の組み合わせ法 $T_1=60, T_2=40$			
	平均の推定値 \hat{b}	\hat{b} の標準偏差	標準偏差の推定値 \hat{a}	\hat{a} の標準偏差	平均の推定値 \hat{b}	\hat{b} の標準偏差	標準偏差の推定値 \hat{a}	\hat{a} の標準偏差
1	0.1445	0.1480	1.0474	0.2084	0.0036	0.1649	1.0336	0.1649
2	0.0544	0.1488	1.0608	0.2138	-0.0269	0.1209	0.7663	0.1219
3	-0.0310	0.1044	0.6925	0.1252	-0.1027	0.1437	1.0091	0.1830
4	-0.0073	0.2142	1.5818	0.3590	0.1616	0.2248	1.4109	0.2354
5	-0.0705	0.1504	1.0660	0.2131	-0.0602	0.1665	1.1001	0.1805
6	-0.4070	0.1644	1.1800	0.2427	-0.2916	0.1663	1.0889	0.1788
7	-0.0862	0.1413	0.9967	0.1977	0.0379	0.1566	1.0637	0.1778
8	0.0445	0.1812	1.3183	0.2845	0.1120	0.1833	1.1273	0.1821
9	0.1230	0.1270	0.8842	0.1682	0.0824	0.1418	0.8998	0.1414
10	0.0058	0.1280	0.8910	0.1716	-0.0024	0.1532	1.0057	0.1670
平均	-0.02298	0.1508	1.0719	0.2184	-0.00863	0.1622	1.0502	0.1733
理論値	0	0.142	1	0.195	0	0.158	1	0.158
	$\sqrt{\frac{1}{n} \sum (\hat{b}-0)^2}$ =0.1483		$\sqrt{\frac{1}{n} \sum (\hat{a}-1)^2}$ =0.2454		$\sqrt{\frac{1}{n} \sum (\hat{b}-0)^2}$ =0.1212		$\sqrt{\frac{1}{n} \sum (\hat{a}-1)^2}$ =0.1649	

6. あとがき

インパルスフラッシュオーバ電圧が、インパルス印加回数に独立である場合、昇降法によって得られたデータからインパルスフラッシュオーバ電圧を推定する方法としては Dixon の計算法が長い間利用されてきており、使用上の注意も議論されてきた。ところがこの計算法が提案されたのは1948年であり、真空管式コンピュータ1号機 ENIAC が誕生して間もない頃である。まだまだ、統計計算をコンピュータで実行できる時代ではなかった。だからこそ、Dixon の近似計算法は大きな意味を持っていたのである。

一方近年では、コンピュータが産業分野の全てに浸透してきており、高電圧計測の分野でも例外ではない。

(本年4月に電気学会高電圧絶縁特性新測定技術調査専門委員会が発足し、マイクロプロセッサを利用した計測方法が研究され始めた。)したがって、インパルスフラッシュオーバ電圧の推定の計算法も、それが複雑であっても、より正確な値を求めることができれば、高電圧実験自動化の中に組み込むべきである。本稿は、このことを意図して書かれたものである。

昇降法では、Dixon の近似計算式そのものの近似誤差を除去する分だけ、Newton 法が正確であり、この傾向は昇降回数が少ない程、昇降幅のフラッシュオーバ電圧の

標準偏差 a に対する比 d/a が $0.5 < d/a < 2$ の範囲を離れる程顕著である。

また、Newton 法によれば、任意の電圧で任意回数電圧印加しても推定値が求められるので、昇降法、補間法の実験方法だけにとどまらず、新たに推定精度の高い実験方法をデザインすることができる。

本稿では以上の2点についてモンテカルロシミュレーションを実行して、確認を行った。

最後に Newton 法のヒントを与えていただいた、九州大学理学部数学教室・工藤昭夫教授に深謝する。

参 考 文 献

- (1) Dixon W. J., Mood A.M.: Journal of the American Statistical Association, Vol. 43 (1948), pp.109
- (2) 岩田, 広瀬, 奥村: 高岳レビュー 第29巻 第96号 p.40 (1982)
- (3) 河野: 電気学会高電圧研究会資料 HV-81-19
- (4) 新藤, 新井, 鈴木: 電気学会高電圧研究会資料 HV-81-20
- (5) Kendall S. M., Stuart A.: The Advanced Theory of Statistics, vol. 2, Griffin (1971)
- (6) 広瀬: 電気学会 絶縁材料高電圧合同研究会資料 HV-82-7
- (7) 広瀬, 岩田: 昭和57年電気学会全国大会 No. 276