

# 昇降法によるインパルスフラッシュオーバ電圧推定法に関する考察

研究所 岩 田 英 郎

” 広 瀬 英 雄

” 奥 村 俊 克

## 内 容 梗 概

昇降法から得られたデータによりインパルスフラッシュオーバ電圧を推定する方法について、その理論的根拠を論述する。また、昇降法を使う際に注意すべき事項として、昇降幅の設定と試験回数について述べる。

### 1. ま え が き

インパルスフラッシュオーバ電圧が正規分布にしたがうと仮定すれば、それは平均値(50%フラッシュオーバ電圧)と分散(不整範囲の分散)によって決定される。インパルス試験では、50%フラッシュオーバ電圧を求める方法として、補間法、昇降法が用いられている。昇降法は少ない試験回数で良い感度を得るので「電気学会電気規格調査会標準規格 JEC-187 インパルス電圧電流試験一般」で推奨されている方法である。本稿では、昇降法によって得られたデータにより、インパルスフラッシュオーバ電圧を推定する方法と、推定誤差について報告する。

昇降法によるデータサンプリングの方法を最初に提示したのは1943年、米国の Explosive Research Laboratoryであった。これは、空中から爆薬試料を落下させるとき、爆発の起こる最低の高さを知る目的で行われた。

昇降法によって得られたデータより母数の推定を行うことを論じたのは Dixon と Mood であり、これは1947年の American Statistical Association の論文に掲載されている<sup>1)</sup>。彼らは、母数の推定を最尤推定法(Maximum Likelihood Method)を使って行っているが、最尤推定法による母数の推定は一般に計算が複雑なので、簡単に計算できる推定近似式を提示した。

茨城大学の筧川氏は Dixon の論文を日本で紹介し、インパルスフラッシュオーバ電圧の推定法に応用した<sup>2)</sup>。これが JEC-187 に記載されているものである。

### 2. 昇降法によるフラッシュオーバ電圧の測定

昇降法によりフラッシュオーバ電圧を求めるには、つぎのような順序で行なう。

(1) 適当な方法で供試物のフラッシュオーバ電圧の平均値、標準偏差の大略の値を推定する。これを  $\mu'$ 、 $\sigma'$  とする。(供試物に10~20回程度、電圧を印加し、必ず放電する電圧の下限、必ず放電しない電圧の上限の近似値を求め、これから推定すればよい。)

(2)  $d=0.5\sigma' \sim 2.0\sigma'$  の一定間隔で印加電圧を、 $\dots V_{-3}, V_{-2}, V_{-1}, V_0, V_{+1}, V_{+2}, V_{+3} \dots$  と段階的に変化できるようにインパルス電圧発生器を調整する。これを水準という。 $V_0 \doteq \mu'$ 、 $d \doteq \sigma'$  にとるのがよい。

(3) 最初  $V_j$  の電圧を印加し放電した場合には、第2回には  $(V_j - d) = V_{j-1}$  の電圧を、もし放電しなかった場合には  $(V_j + d) = V_{j+1}$  の電圧を加える。このように放電すれば、つぎにはそれより  $d$  だけ低い電圧を、放電しなかった場合には、それより  $d$  だけ高い電圧を加える。この操作をくりかえしていく。

(4) 電圧印加は40回程度行なう。

(5) 実験終了後、放電した回数と放電しなかった回数とを計算する。平均値  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma$  を求めるには、回数の少ない側のものを利用する。

すなわち回数の少なかった側の各水準における度数を水準の低いものから高いものへ、 $n_0, n_1, \dots, n_k$  とおき、

$$\sum_{i=0}^k n_i = N, \quad \sum_{i=0}^k i n_i = A, \quad \sum_{i=0}^k i^2 n_i = B$$

を計算すれば、フラッシュオーバ電圧の平均値の推定値  $\mu$  は

$$\mu = V' + d \left( \frac{A}{N} \pm \frac{1}{2} \right) \dots \dots \dots (2.1)$$

で求められる。ただし、複号は放電しなかった回数を利用するときには (+) を、放電した回数を利用するときには (-) をとる。 $V'$  は  $i=0$  に対する電圧である。この場

合、 $\mu$  の誤差 ( $\mu$  の標準偏差)  $e_\mu$  は

$$e_\mu = \frac{G\sigma}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots(2.2)$$

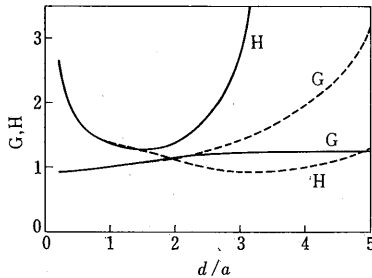
で与えられる。また、フラッシュオーバー電圧の標準偏差の推定値  $\sigma$  は

$$\sigma = 1.62d \left( \frac{NB - A^2}{N^2} + 0.029 \right) \dots\dots\dots(2.3)$$

で求められる。この場合の  $\sigma$  の誤差 ( $\sigma$  の標準偏差)  $e_\sigma$  は

$$e_\sigma = \frac{H\sigma}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots(2.4)$$

で与えられる。ただし、 $G, H$  は第1図に示される。図中で実線は  $\mu$  が  $V_j$  のどれかと一致した場合で、点線は  $\mu$  が  $V_j$  と  $V_{j+1}$  の中間にあるときの曲線であるが、 $d/\sigma < 2$  のときは実用上一致する。



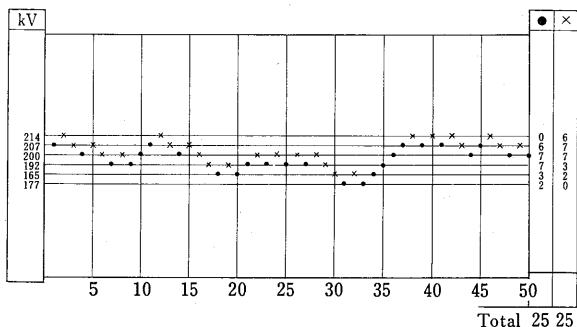
第1図 G, H曲線

### 3. フラッシュオーバー電圧の推定式 ( $\mu, \sigma$ ) の誘導

フラッシュオーバー電圧  $y$  は平均値  $b$ 、分散  $a^2$  の正規分布にしたがうと仮定する。また試験は、

$$y_i = y_0 \pm id \quad (i=0, 1, 2 \dots) \dots\dots\dots(3.1)$$

のレベルでなされる。ここに  $y_0$  は初期印加電圧レベル、 $d$  は電圧昇降幅である。一例として、昇降法にしたがって得られた試験データが第2図のとおりであったとしよう。

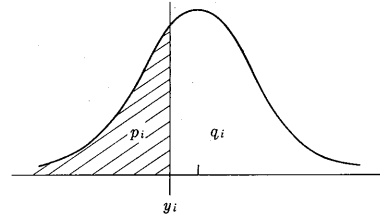


第2図 昇降法による試験データ例

う。 $y$  は正規分布にしたがうので、印加電圧レベル  $y_i$  で電圧印加したときに放電する確率  $p_i$  は

$$p_i = \int_{-\infty}^{y_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2a^2}\right) dy \dots\dots(3.2)$$

で与えられる。



第3図 放電率

これらのデータが毎回独立にサンプルされたと仮定するとき、例えば192kV印加時の放電は(10回の試行のうち3回だけ放電したので) 確率  ${}_{10}C_3 p_{(192)}^3 (1-p_{(192)})^7$  で実限されたとみることができる。ここに  $p_{(192)}$  は192kV印加時の放電率とする。したがって、この試験が実現された確率  $L$  は

$$L = {}_2C_0 (1-p_{(177)})^2 \dots {}_6C_6 p_{(214)}^6 (1-p_{(214)})^0 \dots\dots\dots(3.3)$$

であったとみなすことができる。

最尤推定法にしたがえば、この実現確率  $L$  を最大にするように未知パラメータ  $b, a$  を決めてやれば、 $b, a$  の最も、もっともらしい推定値  $\mu, \sigma$  を得ることができる。この  $L$  を尤度関数と呼ぶ。今、 $n_i$  を  $y_i$  で電圧印加したときの放電した回数、 $m_i$  を放電しなかった回数とすれば、一般に  $L$  は次式で与えられる。

$$L = \prod (n_i + m_i) C_{n_i} p_i^{n_i} (1-p_i)^{m_i} \dots\dots\dots(3.4)$$

さて、

$$|n_i - m_{i-1}| = 0 \text{ or } 1$$

であることは明白なので、 $(n_i)$  か  $(m_i)$  のいずれかがサンプリングの情報の大部分を含むことになる。 $N = \sum n_i, M = \sum m_i$  とし、 $N \leq M$  であると仮定する。このとき(3.4)式は次の形にかける。

$$L = K \prod (p_i q_{i-1})^{n_i} \dots\dots\dots(3.5)$$

ただし、 $q_i = 1 - p_i$  とし、 $K$  は  $b, a^2$  と無関係な定数である。 $L$  の最大値を得るには、 $\log L$  の導関数を零とおいた方程式

$$\frac{\partial \log L}{\partial b} = \sum n_i \left( \frac{z_{i-1}}{q_{i-1}} - \frac{z_i}{p_i} \right) = 0 \dots\dots\dots(3.6)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = \sum n_i \left( \frac{x_{i-1} z_{i-1}}{q_{i-1}} - \frac{x_i z_i}{p_i} \right) = 0 \dots\dots\dots(3.7)$$

を解けばよい。ここに、

$$x_i = (y_i - b)/a \dots\dots\dots(3.8)$$

$$z_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right) \dots\dots\dots(3.9)$$

である。ところが、この根は簡単に得ることはできないので推定値の近似式を求める。そこでまず、 $n_i$  の期待値  $E(n_i)$  を求めることにする。

$w_i$  を次のように定義しよう。

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_i &= \prod_{j=0}^{i-1} \frac{q_j}{p_j} \quad (i > 0) \\ w_i &= \prod_{j=-1}^i \frac{p_j}{q_j} \quad (i < 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.10)$$

$E(n_{i+1}) = E(n_i)$ ,  $E(n_i)/E(n_i) = q_i/p_i$  の関係より,  
 $E(n_i)$  は, (今  $i > 0$  とすれば)

$$\begin{aligned} E(n_i) &= E(n_{i-1}) \cdot \frac{q_{i-1}}{p_{i-1}} \\ &= E(n_{i-2}) \cdot \frac{q_{i-2}}{p_{i-2}} \cdot \frac{q_{i-1}}{p_{i-1}} \\ &= E(n_{i-3}) \cdot \frac{q_{i-3}}{p_{i-3}} \cdot \frac{q_{i-2}}{p_{i-2}} \cdot \frac{q_{i-1}}{p_{i-1}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

と続けることにより,

$$\begin{aligned} E(n_i) &= E(n_0) \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{q_j}{p_j} \\ E(n_i) &= N w_i / \sum w_i \dots\dots\dots(3.11) \end{aligned}$$

が得られる。 $i < 0$  のときも同様の手続きで求められる。

(1) 平均値  $\mu$  の推定式  
 関数

$$\alpha(u) = \frac{z(x)}{q(x)} \cdot \frac{z(x+d/\sigma)}{p(x+d/\sigma)}$$

は,  $u = x + d/2a$  とするとき,  $d < 2a$  ならばほぼ線型である。つまり,

$$\alpha(u) = tu \quad (d < 2a) \dots\dots\dots(3.12)$$

今,  $b_1, b_2$  を次のように定義する。

$$b_1 = \frac{1}{N} \sum n_i y_i \dots\dots\dots(3.13)$$

$$b_2 = \frac{1}{N} \sum n_i y_i^2 \dots\dots\dots(3.14)$$

このとき, (3.6), (3.12) を使えば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum E(n_i) \alpha(u_{i-1}) &= \frac{1}{N} \sum E(n_i) t x_i - d/a + d/2a \\ &= t \left\{ \frac{1}{N} \sum E(n_i) x_i - d/2a \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} E(u_i) &= \frac{1}{N} \sum E(n_i) y_i \\ &= \frac{1}{N} \sum E(n_i) (b + a x_i) \\ &= b + \frac{a}{N} \sum E(n_i) x_i \end{aligned}$$

したがって,

$$E(b_1) = b + \frac{d}{2}$$

よって推定値  $\mu$  は

$$\mu = E(b_1) - \frac{d}{2} \dots\dots\dots(3.15)$$

と書ける。 $E(b_1)$  は放電した回数  $n_i$  の分布の平均なので, (2.1) の  $V + d(A/N)$  に相当し, (3.15)より, (2.1) を得る。

(2) 分散  $a^2$  の推定式

観測データに対して, 平均値  $b$  を中心としたときの  $n_i$  の分布に対する2次のモーメントは

$$\frac{1}{N} \sum n_i (y_i - b)^2 = \frac{1}{N} \sum n_i (y_i - b_1)^2 + d^2/4$$

であり,  $n_i$  を期待値  $E(n_i)$  に直せば

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum E(n_i) y_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum E(n_i) y_i \right)^2 + d^2/4 \\ &= E(b_2) - E^2(b_1) + d^2/4 \dots\dots\dots(3.16) \end{aligned}$$

となる。 $A = \sum i n_i$ ,  $B = \sum i^2 n_i$ ,  $y_i = y_0 + i d$  より

(3.16) は

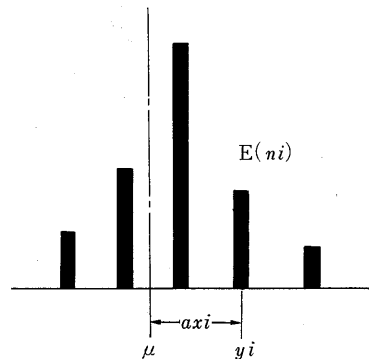
$$d^2 \left( \frac{NB - A^2}{N^2} + \frac{1}{4} \right) \dots\dots\dots(3.17)$$

となる。

一方, 第4図によると, 平均値  $b$  を中心としたときの  $E(n_i)$  の分布に対する2次のモーメントは

$$\frac{1}{N} \sum E(n_i) \cdot (a x_i)^2 = \frac{1}{N} a^2 \frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i} \dots\dots\dots(3.18)$$

で与えられる。



第4図  $E(n_i)$  の分布

したがって

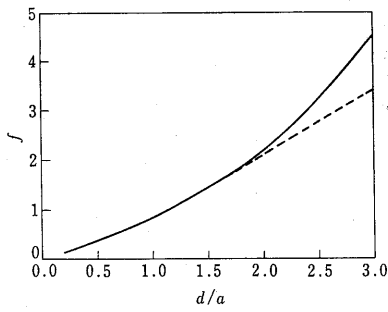
$$d^2 \left( \frac{NB - A^2}{N^2} + \frac{1}{4} \right) = a^2 \frac{\sum w_i x_i^2}{\sum w_i} \dots\dots\dots(3.19)$$

$f = (\sum w_i x_i^2) / (\sum w_i)$  は  $d/a$  の関数であるから,

$$f = k_0 + k_1(d/a) + k_2(d/a)^2 + \dots \dots\dots(3.20)$$

と Taylor 展開して, 局所的に2次式で近似できると仮定しよう。関数  $f$  のグラフを第5図に示す。ここで実線は  $b$  が  $y_i$  のどれかと一致したとき, 点線は  $b$  が  $y_i$  と  $y_{i+1}$  の中間にある場合をあらわす。 $d/a = 0, 0.5, 1.5$  の3点の  $f$  の値から  $k_i$  を求めると,

$$\begin{aligned} k_0 &= 0 \\ k_1 &= 0.618 \\ k_2 &= 0.222 \end{aligned}$$



第5図 関数fのグラフ

この  $k_i$  の値を使って (3.19) の右辺に  $f$  を代入すれば、 $a$  の推定値  $\sigma$  は

$$\sigma \doteq 1.618d \left( \frac{NB - A^2}{N^2} + 0.028 \right) \dots\dots\dots(3.21)$$

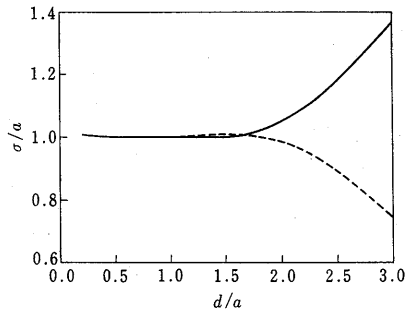
となり、(2.3) 式とほぼ同じ式を得ることができる。

4.  $\sigma$  の近似式の精度 ( $\sigma$  の近似誤差)

$(NB - A^2)/N^2$  は  $d/a$  の関数であるから (3.21) を使えば

$$\frac{\sigma}{a} \doteq 1.618 \left( \frac{d}{a} \right) \left( \frac{NB - A^2}{N^2} + 0.028 \right) \dots\dots\dots(4.1)$$

より、真値  $a$  に対する推定値  $\sigma$  の誤差を求めることができる。(3.19) より  $(NB - A^2)/N^2$  を求め、(4.1) に代入して第6図を得る。この図によると、 $0.5 \leq d/a \leq 1.5$  で  $\sigma/a \doteq 1$  であるが、 $d/a \doteq 2.0$  で  $0.99 \leq \sigma/a \leq 1.05$  となる。ここに実線は  $b$  がどれかの  $y_i$  と一致したとき、点線は  $b$  が  $y_i$  と  $y_{i+1}$  の中間にある場合を表わす。



第6図  $\sigma$  の近似式の精度

5. 推定値 ( $\mu, \sigma$ ) に対しての確率誤差

$b, a$  の分散、共分散は  $T = \log L$  の2次の導関数により決定できる。導関数の期待値は (3.6), (3.7) より容易に次のようになることが判る。

$$E \left( \frac{\partial^2 T}{\partial b^2} \right) = - \frac{N}{a^2} \sum w_i \left( \frac{z_{i-1}^2}{q_{i-1}^2} + \frac{z_i^2}{p_i^2} \right) / \sum w_i$$

$$= - \frac{N}{a^2 G^2} \dots\dots\dots(5.1)$$

$$E \left( \frac{\partial^2 T}{\partial b \partial a} \right) = \frac{N}{a^2} \sum w_i \left( \frac{x_{i-1} z_{i-1}^2}{q_{i-1}^2} + \frac{x_i z_i^2}{p_i^2} \right) / \sum w_i \dots\dots\dots(5.2)$$

$$E \left( \frac{\partial^2 T}{\partial a^2} \right) = - \frac{N}{a^2} \sum w_i \left( \frac{x_{i-1}^2 z_{i-1}^2}{q_{i-1}^2} + \frac{x_i^2 z_i^2}{p_i^2} \right) / \sum w_i$$

$$= - \frac{N}{a^2 H^2} \dots\dots\dots(5.3)$$

(5.2) は平均値  $b$  があるレベル  $y_i$  上にあるが、レベル  $y_i$  と  $y_{i+1}$  の中間にある以外は零とならない。しかし、実際的に共分散は無視でき、(5.1), (5.3) だけで  $b, a$  の確率誤差を決めることができる。したがって、 $\mu$  の誤差 ( $\mu$  の分散)  $e_\mu, \sigma$  の誤差 ( $\sigma$  の分散)  $e_\sigma$  は、

$$e_\mu^2 = G^2 a^2 / N, \quad e_\sigma^2 = H^2 a^2 / N \dots\dots\dots(5.4)$$

で与えられる。ここに、 $G$  と  $H$  は (5.1), (5.3) より定義された  $d/a$  の関数である。これらの関数は第1図にプロットされる。

6. 昇降幅  $d$  の設定

推定値を求める近似式は  $d/a < 2$  という条件下で求められたものであった。したがってまず昇降幅  $d$  は、 $2a$  以下にとることに注意する必要がある。

一方、確率誤差を少なくするためには (言い換えれば試験感度を上げるには)、 $G, H$  の値が小さくなるように  $d/a$  を決めるとよい。第1図によると  $G, H$  が小さい値をとりしかも安定しているのは、 $0.5 \leq d/a \leq 2.0$  であることがわかる。(  $0.2 \geq d/a, d/a \geq 3.0$  になるような電圧昇降幅  $d$  を使って試験したデータはほとんど意味をもたない。)

したがって、適当な方法で推定された仮の  $\sigma'$  に対して、 $d$  は  $(1.0 \sim 2.0)\sigma'$  にできるだけ近く設定することが望ましい。

7. 試験回数について

第1図の  $G, H$  カーブと (5.4) によれば、希望する精度に対しての試験回数を求めることができる。例えば、最も感度の良い昇降幅  $d = 1.5a$  に対して、50回試験を行ったとする。 $G \doteq 1.08, H \doteq 1.28$  であるから、

$$b - \frac{1.08\sigma}{\sqrt{50/2}} \leq \mu \leq b + \frac{1.08\sigma}{\sqrt{50/2}}$$

$$a - \frac{1.28\sigma}{\sqrt{50/2}} \leq \sigma \leq a + \frac{1.28\sigma}{\sqrt{50/2}}$$

となる確率は 0.68 である。つまり、例えば  $a = 1$  の場合、 $\mu$  の推定誤差が約20%以下、 $\sigma$  の推定誤差が約25%以下である確率は0.68である。この推定誤差は試験回数の1/2乗に反比例しているの、誤差を半分にするには、試験回数を4倍にする必要がある。

$d = 2a$  のとき、 $a$  の推定近似式の最大誤差は約5%であった。この誤差と同等な誤差を得るには、 $G \doteq 1.38$  なら

ので、試験回数は $(1.38/0.05)^2 \times 2 = 1,523$ 回となる。つまり、実用上、確率誤差に比べたら、近似式の推定誤差は無視できる。

## 8. ま と め

インパルスフラッシュオーバ電圧は補間法、昇降法などによって測定されるが、昇降法は測定感度が良いため、良く使われている。また、昇降法によって得られたデータをもとにして、フラッシュオーバ電圧を推定するには、最尤推定法が使われている。最尤推定法は一般に計算が煩雑なので、Dixon<sup>1)</sup>らは近似推定式を導いた。本稿では、主にこの近似推定式の誘導について述べ、あわせて、この近似推定式が誘導されるとき条件を参考にしながら、

推定式の適用範囲について述べた。

昇降法を使う際に特に注意すべき事項は、昇降幅 $d$ の設定は予想される不整範囲の標準偏差 $\sigma$ の1~2倍程度にすること、昇降回数は少なくとも40~50回にすることである。

茨城大学の笈川教授には文献を紹介していただいた。ここに深謝する。

## 参 考 文 献

- 1) W. J. Dixon, A. M. Mood, "A method for obtaining and analyzing sensitivity data"; Journal of the American Statistical Association, vol. 43 (1948), p. 109
- 2) 笈川：日立評論35巻5号(昭和28年5月) p. 777